שאלה 2

1. לפי אינטגרציה בחלקים

$$\int xe^{-x}\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

2. לפי נוסחא טריגונומטרית

$$\int e^{2x}\sin^2 x\mathrm{d}x = \int e^{2x}(\frac{1-\cos 2x}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x$$

את האינטגרל שנשאר מוצאים בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \int e^{2x}\sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - \int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x$$

ולכן

$$\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin 2x$$

כלומר התשובה הסופית היא

$$\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{8}e^{2x}\sin 2x + c$$

.3

$$\int x\sqrt[6]{2x+3}\mathrm{d}x \underset{\substack{t=2x+3\\ \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x}}{=} \int \frac{(t-3)}{2}\sqrt[6]{t}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \int \frac{t^{\frac{7}{6}}}{4}\mathrm{d}t - \int \frac{3t^{\frac{1}{6}}}{4}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{6}{13}\frac{t^{\frac{13}{6}}}{4} - \frac{6}{7}\frac{3t^{\frac{7}{6}}}{4} + c$$

כלומר התשובה היא

$$\frac{6}{52}\sqrt[6]{(2x+3)^{13}} - \frac{18}{28}\sqrt[6]{(2x+3)^{7}}$$

.4

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$$

נציב $t^2 = x+1$ ולכן $2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ ונקבל

$$\int \frac{t+2}{t^2-1-t+1}2t\mathrm{d}t = 2\int \frac{t+2}{t-1}\mathrm{d}t = 2\int 1 + \frac{3}{t-1}\mathrm{d}t =$$

$$= 2t + 6\ln|t-1| + c = 2\sqrt{x+1} + 6\ln|\sqrt{x+1}-1| + c$$

.5

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$$

נציב $t^2 = 9 - x^2$ כלומר

$$t\mathrm{d}t = -x\mathrm{d}x$$

ולכן האינטגרל הוא

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x = \int x^2\sqrt{9-x^2}x\mathrm{d}x = \int (9-t^2)t(-t\mathrm{d}t) = -\int 9t^2\mathrm{d}t + \int t^4\mathrm{d}t$$

$$= -3t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c = -3(\sqrt{9-x^2})^3 + \frac{1}{5}(\sqrt{9-x^2})^5 + c$$

$$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \boldsymbol{dx} = \int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx = \int\left[\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right] = -\frac{1}{x}-2ln|x|+x+C \quad .6$$

$$\int\frac{e^x}{e^x+e^{\frac{x}{2}}}\boldsymbol{dx} = \int\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}dx =_{u=e^{\frac{x}{2}}}= \int\frac{2du}{u+1} = 2ln\left|e^{\frac{x}{2}}+1\right|+C \quad .7$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-3}} =_{t=\sqrt{2x-3}}= \cdots = \sqrt{\mathbf{2x-3}}+\mathbf{C} \quad .8$$

$$\int x^7\sqrt{5+3x^4}\,dx = \int x^4 x^3\sqrt{5+3x^4}\,dx = \frac{1}{12}\int x^4\cdot 12x^3\sqrt{5+3x^4}\,dx \quad .9$$

$$g' = x^3\sqrt{5+3x^4}\ , \quad f := x^4$$

$$g := \frac{1}{18}(5+3x^4)^{3/2}\ , \quad f' = 4x^3$$

ולכן נקבל:

$$\int x^7\sqrt{5+3x^4}\,dx = x^4\cdot\frac{1}{18}(5+3x^4)^{3/2} - \int\frac{1}{18}(5+3x^4)^{3/2}\cdot 4x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{18}x^4(5+3x^4)^{3/2} - \frac{2}{9}\int x^3(5+3x^4)^{3/2}\,dx = \frac{1}{18}x^4(5+3x^4)^{3/2} - \frac{1}{135}(5+3x^4)^{5/2} + C$$

.10 $$\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx = x^2 \cdot e^{x^2}\frac{-1}{2(x^2+1)} + \int \frac{2xe^{x^2}(1+x^2)}{2(1+x^2)}dx =$$

$$= -\frac{x^2e^{x^2}}{2(x^2+1)} + \int x\cdot e^{x^2}dx = -\frac{x^2e^{x^2}}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

.11 $\int \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx$

פתרון:

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ולכן $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$.

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ ולכן $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ ו $\sin^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2$.

נכפיל את שתי המשוואות האחרונות לקבל $\int\sin^6 x\cos^2 xdx = \int\sin^4 x\sin^2 x\cos^2 xdx =$

$$= \int\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2\frac{1}{4}\sin^2 2xdx = \frac{1}{16}\left[\int\sin^2 2xdx - \int 2\cos 2x\sin^2 2xdx + \int\cos^2 2x\sin^2 2xdx\right].$$

נחשב כל אחד מן האינטגרלים:

$\cos 4x = \cos 2\cdot 2x = 1-2\sin^2 2x$ ולכן $\int\sin^2 2xdx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

$\int 2\cos 2x\sin^2 2xdx$, נבצע הצבה $t=\sin 2x$ ולכן $dt = 2\cos 2xdx$ ונקבל

$$\int 2\cos 2x\sin^2 2xdx = \int t^2dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 2x + C$$

$\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 = \cos^2 2x\sin^2 2x$ אבל $\cos 8x = 1-2\sin^2 4x$ ולכן

$$\int\cos^2 2x\sin^2 2xdx = \frac{1}{4}\int\sin^2 4xdx = \frac{1}{8}\int(1-\cos 8x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}\sin 8x + C$$

נציב את כל התוצאות האלה לקבל את התשובה הסופית.