תרגיל מס 3 - אינפי 4 תשע"ט - פתרונות

הנחיות: בחישוב של אינגרלים, עם העקומה היא פשוטה, ניתן להניח שהאינטגרל להניח שאם לשתי פרמטריזציות יש את אותה האוריינטציה, אזי האינטגרלים שווים. כלמר, האינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה, אלא באוריינטציה בלבד. כל עוד מדובר בפרמריזציות פשוטות או עם מספר סופי של נק' בהן הפרמטריזציה אינה חח"ע.

1. עבור כל אחד התחומים הבאים, קבעו אם הוא כוכבי או קמור (ייתכן שאף אחת מהאפשרויות אינה מתקיימת)

(א) כדור היחידה בנורמה כלשהי.

(ב) $\{(x,0)\,|x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y)\,|x\in\mathbb{R}\}$. (אוסף כל הנקודות שנמצאות באחד מן הצירים.

(ג) $\left\{\left(x^2+y^2\right)^2\leq x^2-y^2\right\}$.

(ד) $\left\{(x,y)\,|-1\leq x\leq 1,-x^2-1\leq y\leq x^2+1\right\}$

פתרון:

(א) כדור יחידה הוא קמור ולכן פשוט קשר. על מנת לראות כדור יחידה הוא קמור ניקח שתי נקודות x,y בכדור היחידה. נראה שלכל נקודה על הקטע שמחבר אותן $z=tx+(1-t)\,y$ עבור $0\leq t\leq 1$ בקטע המחבר אותן, z היא גם נקודה בכדור היחידה. על מנת להוכיח את זה מספיק להוכיח

$$\|z\|\leq 1\,.$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}\|z\|&=\|tx+(1-t)\,y\|\\&\leq\|tx\|+\|(1-t)\,y\|\\&\leq t\,\|x\|+(1-t)\,\|y\|\\&\leq t+(1-t)=1\end{aligned}$$

(ב) התחום אינו קמור, שכן הקטע המחבר את $(x,0)$ ו $(0,y)$ אינו נמצא על אחד הצירים עבור $x,y\neq 0$. מצד שני הוא כוכבי, כי כל נקודה שמצאת על אחד הצירים ניתן לחבר ל $(0,0)$ על ידי קטע ישר שמוכל באותו הציר.

(ג) נשים לב שהתחום אינו קמור. תחילה, נשים לב שבגלל ש $x^2-y^2 \geq \left(x^2+y^2\right)^2 \geq 0$, אם $|y|<|x|$ אזי x^2-y^2 אינה נמצאת בתחום. עכשו, נשים לב שמשיקולי סימטריה, לכל נקודה (x,y) אשר נמצאת בתחום, גם $(-x,y)$ נמצאת בו. אבל הקטע שמחבר אותם, עובר דרך $(0,y)$ שכאמור אינו נמצא בתחום. מצד שני, נראה שהתחום כוכבי. נשתמש בקואורדינטות פולריות:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\cos\theta$$

נציב באי שוויון ונקבל

$$.r^4 \leq r^2\cos 2\theta$$

נקבל

$$.0 \leq r^2\left(\cos 2\theta - r^2\right)$$

אם $r^2 \geq 0$ אז $\cos 2\theta \geq r^2$. אם $r=0$, מדובר ב $(0,0)$ והזווית לא משנה. אחרת $r \leq \sqrt{\cos 2\theta}$ ו $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ו $\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$. (אחרת $\cos 2\theta$ שלילי למרות שמתקיים $\cos 2\theta > r^2$). מכאן קל לראות שכל נקודה בתחום ניתן לחבר על ידי קטעי ישר ל $(0,0)$, שכן אם $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ עבור $r \leq \sqrt{\cos 2\theta}$ אזי הקטע במחרב את (x,y) ל $(0,0)$ הינו מהצורה $\left\{(t\cos\theta, t\sin\theta), 0 \leq t \leq r\right\}$ ומן הסתם מוכל בתחום שכן $r < t$ גורר ש $t \leq \sqrt{\cos 2\theta}$

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם A קמורה, אזי הפנים של A גם קמורה.

(ב) אם A, B קמורות, אזי $A \cap B$ גם קמורה.

(ג) אם A ו B קבוצות כוכביות, $A \cap B$ כוכבית.

(ד) אם A כוכבית, אזי הפנים של A גם קבוצה כוכבית.

(ה) אם A כוכבית, אזי הסגור של A, $\overline{A}$ גם כוכבית.

(ו) אם A כוכבית, אזי המשלים של A גם כוכבי.

(ז) אם $A \neq \mathbb{R}^n$ כוכבית, אזי A^c (המשלים של A) אינו חסום.

פתרון:

(א) נניח בשלילה ש A קמורה ופנים של A אינה קמורה. אזי קיימות נקודות בפנים של A, x, y כך שהקטע $\{tx + (1-t)\,y | 0 \leq t \leq 1\}$ אינו מוכל בפנים של A. כלמר קיים $0 < t < 1$ כך ש

$$.z = tx + (1-t)\,y \notin A$$

מכיוון ש z אינה נקודה פנימית, לכל $0 < r$ קיים $p \in B(z,r)$ כך ש $p \notin A$. ניקח r מספיק קטן כך שיתקיים:

i. $.B(x,r), B(y,r) \subseteq A$

ii. $q \in A$ עבור ההיטל q של p על $\{tx+(1-t)\,y|0\le t\le 1\}$ וכן הקטע $\{tp+(1-t)\,q|0\le t\le 1\}$מוכל ב $B\,(z,r)$.

iii. $q=sx+(1-s)\,y$ עבור $0<s<1$.

נסמן את $v=p-q$. מתקיים

$$\begin{aligned}p&=sx+(1-s)\,y+v\\&=sx+(1-s)\,y+sv+(1-s)\,v\\&=s\,(x+v)+(1-s)\,(y+v)\end{aligned}$$

אבל $x+v\in B\,(x,r)\,,y+v\in B\,(y,r)$ ולכן, $x+v,y+v\in A$ וגם $sx+(1-s)\,y+v=p\in A$ בגלל הקמירות של A וקיבלנו סתירה.

(ב) נניח ש A,B קמורות. תהיינה $x,y\in A\cap B$. מהקמירות של A ו B נובע שלכל $0\le t\le 1$ מתקיים

$$\begin{gathered}tx+(1-t)\,y\in A\wedge ty+(1-t)\,y\in B\\\Downarrow\\tx+(1-t)\,y\in A\cap B\end{gathered}$$

ולכן $A\cap B$ קמורה.

(ג) נפריך על ידי דוגמא נגדית הבאה. ניקח $A=\{(x,0)\,|x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y)\,|y\in\mathbb{R}\}$ ו $B=\{t\,(1,0)+(1-t)\,(0,1)\}$. מתקיים $A\cap B=\{(1,0)\,,(0,1)\}$ והקבוצה אינה כוכבית. מצד שני B קמורה ולכן כוכבית וכמו כן גם A כי כל נקודה ניתן לחבר על ידי קטע ישר לראשית.

(ד) הפרכה. ניקח $A=\overline{B\,((1,0),1)}\cup\overline{B\,((-1,0)\,,1)}$ ב $\mathbb{R}^2$. קל לראות שהקוצה היא כוכבית. מצד שני הפנים של A הוא איחוד של שני מעגלים פתוחים

$$A^\circ=B\,((1,0)\,,1)\cup B\,((-1,0)\,,1).$$

הקבוצה אינה קשירה ולכן אינה כוכבית.

(ה) מכיוון ש A כוכבית, קיים $p\in A$ כך שלכל $x\in A$, לכל $0\le t\le 1$, $tp+(1-t)\,a\in A$. נראה שעבור $a\in\overline{A}$, לכל $0\le t\le 1$ מתקיים $tp+(1-t)\,a\in\overline{A}$ ונסיק ש $\overline{A}$ כוכבית. מכיוון ש $a\in\overline{A}$ קיימת סדרה $\{a_n\}$ ב A שמתכנסת ל a. אבל ברור שאם

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

אזי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}tp+(1-t)\,a_n=tp+(1-t)\,a$$

ולכן $tp+(1-t)\,a_n\in\overline{A}$, כנדרש.

(ו) הפרכה. ניקח למשל A=$\{(x,0)\,|x\in\mathbb{R}\}$. קל לראות ש A קמורה ולכן כוכבית. מצד שני A^c אינו קשיר ולכן אינו כוכבי.

(ז) נוכיח את הטענה, עבור A כך ש $A^c \neq \emptyset$. (במקרה הזה הטענה לא נכונה). נניח בשלילה ש $\overline{A}$ חסום. אזי קיים R כך שלכל x כך ש $\|a\| > R$ מתקיים a∈A. נראה שלכל $p \in A$ קיים $q \in A$ ו $0 \leq t \leq 1$ כך ש

$$.tp + (1-t)\, q \notin A$$

יהי $x \in A^c$. ניקח $q = p + \alpha\,(x-p)$ עבור $\alpha > 1$ כך ש $\|p + \alpha\,(x-p)\| > R$. קל לראות שהקטע שמחבר את p ו q עובר דרך x ו $x \notin A$ על פי הבחירה של x. ולכן A אינה יכולה להיות כוכבית.

3. עבור $D \in \mathbb{R}^n$, נאמר ש D היא תחום פשוט קשר אם לכל מסילה סגורה $\gamma : [a,b] \to D$ קיימת פונקציה רציפה $\tilde{\gamma} : [a,b] \times [0,1] \to D$ כך ש $\tilde{\gamma}(x,0) = \gamma\,(x)$ ו $\tilde{\gamma}\,(x,1) = c$ (כלמר $\tilde{\gamma}\,(x,1)$ היא פונקציה קבועה).

(א) הראו שכל תחום כוכבי הוא פשוט קשר.

(ב) תנו דוגמה לתחום פשוט קשר שאינו כוכבי.

פתרון.

(א) יהי S תחום כוכבי ו $\gamma : [a,b] \to S$ מסילה סגורה. על פי ההגדרה קיימת $p \in S$ כך שלכל $x \in S$ מתקיים $tp + (1-t)\,x \in S$ לכל $0 \leq 1 \leq t$. נגדיר

$$\tilde{\gamma} : [a,b] \times [0,1] \to S$$

על ידי

$$.\tilde{\gamma}\,(x,t) = tp + (1-t)\,\gamma\,(x)$$

קל לראות ש $\tilde{\gamma}$ רציפה ומקיימת את התנאי

$$\tilde{\gamma}\,(x,0) = \gamma\,(x)$$
$$\tilde{\gamma}\,(x,t) = p$$

כנדרש.

(ב) תחילה, נשים לב שאם X פשוט קשר ו $f : X \to Y$ היא פונקציה חח"ע, על ורציפה בעלת כך ש $f^{-1} : Y \to X$ רציפה, אזי Y פשוט קשר. נתבוננן בפרבולה $z = x^2 + y^2$. קל לראות שהיא תמונה של $\mathbb{R}^2$ תחת פונקציה חח"ע, על ורציפה בעלת הופכית רציפה ולכן פשוטת קשר. מצד שני, לכל שתי נקודות על הפרבולה הקטע שמחבר אותן חותך את הפרבולה רק באותן נקודות ולכן פרבולה אינה תחום כוכבי.

4. הראו שם α ו β הן מסילות אנטישקולות, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ שדה, אזי האינגרל $\int_\alpha F$ קיים אם ורק אם $\int_\beta F$ קיים ומתקיים $\int_\alpha F = -\int_\beta F$.

פתרון. נניח ש $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ו $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ הן מסילות אנטישקולות. אזי קיימת פונקציה $\phi : [a,b] \to [c,d]$ חח"ע, על וגזירה ברציפות כך ש $\phi'\,(x) < 0$ לכל $x \in [a,b]$ ומתקיים

$$.\alpha = \beta \circ \phi$$

בהינתן חלקוה $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ של $[a, b]$ ובחירת נקודות $x = (x_1, \ldots, x_n)$ כך ש $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, אם נסמן $u_{n-i} = \phi(t_i)$ ו $y_{n-i+1} = \phi(x_i)$ אזי

$$c = u_0 < u_1 \cdots < u_n = d$$

היא חלוקה של $[c, d]$ ו $y_i \in [u_{i-1}, u_i]$. נשים לב שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} F(\alpha(x_i)) \cdot (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} F(\beta(\phi(x_i))) \cdot (\beta(\phi(x_i)) - \beta(\phi(x_{i-1}))) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} F(\beta(y_{n-i+1})) \cdot (\beta(u_{n-i}) - \beta(u_{n-i+1})) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} F(\beta(y_k)) \cdot (\beta(u_{k-1}) - \beta(u_k)) =$$

$$-\sum_{k=1}^{n} F(\beta(y_k)) \cdot (\beta(u_k) - \beta(u_{k-1}))$$

עכשו, נניח שהאינטגרל $\int_\alpha F$ קיים. נראה ש $\int_\beta F$ קיים. נראה שלכל סדרת חלוקות $u^{(n)} : c = u_0^{(n)} < u_1^{(n)} < \cdots < u_{m_n}^{(n)} = d$ יחד עם בחירות נקודות $y^{(n)} = \left(y_1^{(n)} < \cdots < y_{m_n}^{(n)}\right)$ כך ש

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lambda\left(u^{(n)}\right)\right) = 0$$

מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} F\left(\beta\left(y_k^{(n)}\right)\right) \cdot (\beta(u_k) - \beta(u_{k-1})) =$$

$$-\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(\alpha(x_i))(\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1}))$$

כאשר הקשר בין x ל y ו t ו u נתון כמו קודם (הם קיימים כי ϕ היא חח"ע ומונוטונית). $-\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(\alpha(x_i))(\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})) = -\int_\alpha F$ על פי ההנחה של אינגרביליות. וקיבלנו את השוויון המבוקש. את הכיוון השני מראים באופן סימטרי.

5. עבור כל אחת מהתבניות הבאות, קבעו אם היא סגורה או מדוייקת. נמקו. במידה והיא מדויקת, מצאו את פונקציית הפוטנציאל שלה.

(א) $\omega(x, y) = e^{x-y}(1 + x + y)\,\mathrm{d}x + e^{x-y}(1 - x - y)\,\mathrm{d}y$ בכל $\mathbb{R}^2$.

(ב) $\omega(x, y) = \frac{y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{y}{1+x^2+y^2}$ בכל $\mathbb{R}^2$.

(ג) $\omega\left(x,y\right)=-\frac{y^2}{(x-y)}\mathrm{d}x+\frac{x^2}{(x-y)}\mathrm{d}x$ עבור $x>y$.

(ד) $\omega\left(x,y\right)=\frac{2y}{(x+y)}\mathrm{d}x-\frac{2x}{(x+y)}\mathrm{d}y$ עבור $x+y>0$.

(ה) $\omega\left(x,y,z\right)=\left(y^2+2xz^2\right)\mathrm{d}x+\left(2xy+2y^2z^3\right)\mathrm{d}x+\left(2x^2z+3y^3z^2\right)\mathrm{d}z$ בכל $\mathbb{R}^3$.

פתרון. עיין שאלה 1 בתגיל 3 של תשע"ז.

6. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_\Gamma\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ כאשר Γ היא השפה של הריבוע $ABCD$, $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-1,0)$, $D=(-1,0)$ נגד כיוון השעון.

(ב) $\int_\Gamma-\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y):(x-2)^2+(y-3)^2=1\right\}$ נגד כיוון השעון.

(ג)

$$\int_\Gamma y^3z^2\mathrm{d}x+\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$$

כאשר $\Gamma=\left\{(x,y,z):y^2+z^2=4,x=0,z<0\right\}$ נגד כיוון השעון אם מסתכלים מהכיוון החיובי של ציר ה x.

(ד) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ נגד כיוון השעון.

פתרון. עיין שאלה 2 בתרגיל 3 של תשע"ז.

7. הוכיחו שאם $\|F\left(x\right)\|\le M$ עבור שדה F, γ מסילה אזי מתקיים

$$\left|\int_\Gamma f\cdot\mathrm{d}\gamma\right|\le ML\left(\gamma\right).$$

פתרון. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה. לכל חלוקה $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ ולכל בחירה של נקודות $x_1,\dots x_n$ כך ש $x_i\in[t_{i-1},t_i]$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n\left\langle f\left(\gamma\left(x_i\right)\right)\left(\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\right)\right\rangle\right|&\le\sum_{i=1}^n\|f\left(\gamma\left(x_i\right)\right)\|\,\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\|\\&\le\sum_{i=1}^n M\,\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\|\\&\le M\sum_{i=1}^n\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\|\\&\le ML\left(\gamma\right)\end{aligned}$$

מצד שני, האיטנגרל הוא גבול של סכומים כדלהלן, ולכן גם קטן מ $ML\left(\gamma\right)$.