# הסתברות וסטטיסטיקה מתמטית - תרגול 12

## שליטה סטוכסטית

**הגדרה:**

יהיו $X$ ו-$Y$ מ"מ. אומרים ש-$X$ נשלט סטוכסטית ע"י $Y$ אם לכל $a$ מתקיים $P(X \geq a) \leq P(Y \geq a)$.

**טענה:**

$X$ נשלט סטוכסטית ע"י $Y$ $\Longleftrightarrow$ קיים צימוד $\hat{X}, \hat{Y}$ של $X, Y$ שבו $\hat{X} \overset{a.s.}{\leq} \hat{Y}$.

**תרגיל:**

יהיו $X = \begin{cases} 0, & 1/2 \\ 1, & 1/2 \end{cases}$, $Y = \begin{cases} 0, & 1/3 \\ 1, & 1/3 \\ 2, & 1/3 \end{cases}$. הראו ש-$X$ נשלט סטוכסטית ע"י $Y$ לפי צימודים.

**פתרון:**

נגריל קודם את $Y$ ואז נגריל את $X$: אם $Y=0$ נבחר $X=0$, אם $Y=2$ נבחר $X=1$, ואם $Y=1$ נבחר $X = \begin{cases} 0, & 1/2 \\ 1, & 1/2 \end{cases}$. קל לראות שבצימוד הזה $X \leq Y$.

**תרגיל:**

נניח $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p)$, $m > n$. הראו ש-$X$ נשלט סטוכסטית ע"י $Y$.

**פתרון:**

נבחר צימוד כך: נגריל את $X$ ונגריל $Z \sim Bin(m-n,p)$ ב"ת ב-$X$.

אז $X \leq X+Z \sim Bin(m,p)$.

# תהליכי פואסון

אם $X \sim Poi(\lambda)$ אז לכל $k=0,1,2,\dots$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

אם $X \sim Poi(\lambda)$ ו- $Y \sim Poi(\mu)$ ב"ת אז $X+Y \sim Poi(\lambda+\mu)$.

<u>משפט:</u> (משפט ראיקוב)
אם $X$ ו-$Y$ ב"ת ו- $X+Y \sim Poi(\lambda)$, אז קיים $c \in \mathbb{R}$ ו- $0 \leq \mu \leq \lambda$
כך ש- $X \sim c+Poi(\mu)$ ו- $Y \sim -c+Poi(\lambda-\mu)$.

Characteristic Functions, Griffin p.242

<u>עוד תכונה:</u>

$$Bin\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} Poi(\lambda)$$

<u>הגדרה:</u>
תהליך מנייה (counting process) = תהליך שסופר כמות מאורעות שמתרחשים בזמן מסוים.
פורמלית $\{X_t\}_{t\geq 0}$ תהליך סטוכסטי, $X_t$ = כמה מאורעות התרחשו בין $0 \leq t$,

- $X_0 = 0$.
- $X_t \in \mathbb{N}_0$.
- לכל $s<t$, $X_t - X_s$ = כמות המאורעות בין זמן $s$ לזמן $t$.

אומרים שיש לתהליך הפרשים בלתי-תלויים אם לכל $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$,
$X_{t_2}-X_{t_1}, \dots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ ב"ת.

## הגדרה:

**תהליך פואסון** הוא תהליך מנייה המודל התרחשות מאורעות בקצב ממוצע קבוע. (הומוגני = לא תלוי בזמן, לא הומוגני = תלוי בזמן).

פורמלית, תהליך פואסון עם קצב $\lambda>0$ הוא תהליך סטוכסטי $\{X_t\}_{t\geq 0}$:

- $X_0=0$.
- $X_t$ בעל הפרשים בלתי-תלויים.
- בכל קטע מאורך $\tau$, כמות המאורעות בקטע מתפלגת $Poi(\tau\lambda)$.

## תרגיל:

מספר הלקוחות המגיעים למכולת הוא תהליך פואסון, כשבשעה נכנסים בממוצע 10 לקוחות.

א. מה ההסתברות שהגיעו שני לקוחות בין 10:00 ל-10:20?

ב. מה ההסתברות שהגיעו שני לקוחות בין 10:00 ל-10:20 ושמונה לקוחות בין 10:20 ל-11:00?

## פתרון:

א. $X_{10\frac{1}{3}}-X_{10}\sim Poi\left(\frac{10}{3}\right)$, לכן

$$P\left(X_{10\frac{1}{3}}-X_{10}=2\right)=e^{-10/3}\cdot\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{2!}\simeq 0.198$$

ב. כיוון שההפרשים בלתי-תלויים,

$$P\left(X_{10\frac{1}{3}}-X_{10}=2,\ X_{11}-X_{10\frac{1}{3}}=8\right)=P\left(Poi\left(\tfrac{10}{3}\right)=2\right)\cdot P\left(Poi\left(\tfrac{20}{3}\right)=8\right)\approx 0.0244$$

## תרגיל:

יהי $\{X_t\}_{t\geq 0}$ תהליך פואסון עם קצב $\lambda$. מהי הפונקציה $C(t_1,t_2)=Cov(X_{t_1},X_{t_2})$?

**פתרון:**

יהיו $t_1 \le t_2$.

$$Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = Cov(X_{t_1}, X_{t_1} + (X_{t_2} - X_{t_1})) =$$

$$= Cov(X_{t_1}, X_{t_1}) + \underbrace{Cov(X_{t_1}, X_{t_2-t_1})}_{=0 \text{ כי הם ב"ת}} = Var(X_{t_1}) = \lambda t_1$$

לכן $C(t_1,t_2)=\lambda\cdot\min\{t_1,t_2\}$.

**טענה:**

יהי $\{X_t\}$ תהליך פואסון עם קצב $\lambda$. יהי $T_n$ הזמן שבו קורה המאורע ה-n-י (זמן ההגעה). יהי $W_n = T_n - T_{n-1}$ (זמן ההמתנה).

אזי $W_n \sim Exp(\lambda)$, וגם $W_1, W_2, \dots$ ב"ת.

**הוכחה:**

נוכיח עבור $n=1$:

$$P(W_1>t)=P(T_1>t)=P(X_t=0)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!}=e^{-\lambda t}$$

לכן $W_1\sim Exp(\lambda)$.

עבור $n=2$, מאוד דומה:

$$P(W_2>s \mid W_1=t) = P\left(\text{לא היו מאורעות ב-}(t,s+t] \mid W_1=t\right) =$$

$$\overset{\text{הפרשים ב"ת}}{=} P\left(\text{לא היו מאורעות ב-}(t,s+t]\right) = e^{-\lambda s}$$

עבור n כללי - דומה.

האי-תלות נובעת מכך שהביטוי בסוף אינו תלוי ב-$t$.

**מסקנה:** $T_n\sim\Gamma(n,\lambda)$, בפרט $\mathbb{E}[T_n]=\frac{n}{\lambda}$, $Var(T_n)=\frac{n}{\lambda^2}$.

**טענה:** (איחוד, פיצול ודילול)

יהיו $\{X_t\}_{t\ge0}$ ו-$\{Y_t\}_{t\ge0}$ תהליכי פואסון ב"ת עם קצבים $\lambda$ ו-$\mu$.

א. $\{X_t+Y_t\}_{t\ge0}$ תהליך פואסון עם קצב $\mu+\lambda$.

ב. נסתכל על $\{X_t\}_{t\ge0}$ ונצבע כל מאורע בו בשני צבעים: כתום וכחול, כל מאורע הוא בסיכוי $p$ כתום ובסיכוי $1-p$ כחול (ב"ת בשאר המאורעות ובמספר שלהם).

$O_t$ = כמות המאורעות הכתומים, $B_t$ = כמות המאורעות הכחולים.

$O_t$ תהליך פואסון עם קצב $\lambda p$

$B_t$ תהליך פואסון עם קצב $\lambda(1-p)$

$O_t, B_t$ ב"ת.

**תרגיל:**

יהיו $\{X_t\}_{t\ge0}$ ו-$\{Y_t\}_{t\ge0}$ תהליכי פואסון ב"ת עם קצבים $\overset{\lambda}{\overset{\shortparallel}{1}}$ ו-$\overset{\mu}{\overset{\shortparallel}{2}}$ בהתאמה.

מהי ההסתברות שהמאורע השני של $\{X_t\}$ קורה לפני המאורע השלישי של $\{Y_t\}$?

**פתרון:**

ניקח תהליך פואסון $\{Z_t\}_{t\ge0}$ עם קצב $\xi=3$. נפצל אותו באופן הבא: לכל מאורע נטיל מטבע-$\frac{1}{3}$, אם יצא 1 נספור בחלק של ה-$X_t$-ים אם יצא 0 נספור בחלק של ה-$Y_t$-ים.

התפלגות כמות המאורעות בכל אחד מהצבעים היא תהליכי פואסון ב"ת עם קצבים 1 ו-2.

תרגמנו את השאלה לשאלה הבאה: מטילים מטבע-$\frac{1}{3}$ שוב ושוב. מה הסיכוי לקבל פעמיים 1 לפני שמקבלים 3 פעמים 0?

$$\sum_{k=2}^{4}\binom{4}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}=\frac{11}{27}$$