בס"ד
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מספר הקורס : 83-115-01
מרצה : דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'
סמסטר ב', מועד ב' : כ אלול התשעה (4.09.2015)
<u>משך הבחינה : שלוש שעות</u>

<u>חומר עזר : 3 דפים חד-צדדיים של A4 , מחשבון רגיל (אין להשתמש במחשבון גרפי)</u>

<u>**ניקוד :** במבחן אפשר לצבור **104** נקודות.</u>

<u>יש לפרט שלבי החישוב. נא לכתוב באופן ברור ומסודר. שאלה מבולגנת ולא מסודרת לא תוכל לזכות במלוא הנקודות.</u>

בהצלחה!

שאלה 1. (24 נקודות)

א. בהינתן משוואה $-2xydy+\left(x^2+y^2\right)dx=0$

i. עבור אילו ערכים של b מובטח פתרון יחיד של בעיית התחלה $-2xydy+\left(x^2+y^2\right)dx=0,\quad y(b)=1$? ענו בלי לפתור את המשוואה. נמקו היטב;

ii. מצאו את פתרון כללי של המשוואה הנתונה.

ב. ידוע שהמשוואה $\frac{e^t}{\cos y}-\tan y+y'=0$ בעלת גורם אינטגרציה $\mu=e^{-at}\cos y$ עבור a כלשהו. מצאו את a ופתרו את המשוואה.

פתרון :

א.

i. $-2xydy+\left(x^2+y^2\right)dx=0,\quad y(b)=1$

$$-2xydy+\left(x^2+y^2\right)dx=0$$

$$y'=f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

$$f(x,y)\ \textit{is continuous in each point except}\ (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{4xy^2-2x\left(x^2+y^2\right)}{4x^2y^2}=\frac{-2x^3+2xy^2}{4x^2y^2}=\frac{y^2-x^2}{2xy^2}$$

$$f_y'\ \textit{is continuous in each point except}\ (0,0)$$

$$\textit{So, the solution is guaranteed for}\ b\neq 0$$

.ii

$$-2xydy+\left(x^2+y^2\right)dx=0\ /:x^2$$

$$-2\frac{y}{x}dy+\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx=0$$

$$t=\frac{y}{x},\ y'=t'x+t$$

$$-2t\left(t'x+t\right)+\left(1+t^2\right)=0$$

$$xt'=\frac{-\left(1+t^2\right)+2t^2}{-2t}$$

$$xt'=-\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t}$$

$$\frac{2tdt}{t^2-1}=-\frac{1}{x}dx$$

$$\ln\left|t^2-1\right|=-\ln|x|-\ln|C|,\ C\neq 0$$

$$t^2-1=C\frac{1}{x},\ C\neq 0$$

$$\frac{y^2}{x^2}=1-C\frac{1}{x}$$

$$y^2=x^2-Cx,\ C\neq 0$$

.ב

$$\frac{e^t}{\cos y}-\tan y+y'=0$$

$$\left(\frac{e^t}{\cos y}-\tan y\right)dt+dy=0$$

$$e^{-at}\cos y\left(\frac{e^t}{\cos y}-\tan y\right)dt+e^{-at}\cos ydy=0$$

$$\left(e^{t(1-a)}-e^{-at}\sin y\right)dt+e^{-at}\cos ydy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}:\ -e^{-at}\cos y=-ae^{-at}\cos y\ \Rightarrow\ -e^{-at}=-ae^{-at}\Rightarrow a=1$$

$$\left(1-e^{-t}\sin y\right)dt+e^{-t}\cos ydy=0$$

$$U(t)=\int e^{-t}\cos ydy=e^{-t}\sin y+C(t)$$

$$U'(t)=-e^{-t}\sin y+C'(t)=1-e^{-t}\sin y$$

$$C(t)=t+C$$

$$e^{-t}\sin y+t=C$$

שאלה 2 . (16 נקודות)

למשוואה $y''+9y=\frac{9}{\cos^2 3t}$ יש פתרון פרטי $y=\sin 3t\cdot\ln\left(\tan 3t+\frac{1}{\cos 3t}\right)-1$ בקטע $0<t<\frac{\pi}{6}$.

א. הראו, איך מוציאים את הפתרון הזה ע"י שיטת ווריאציית פרמטרים. היעזרו בנוסחה $\int\frac{dx}{\cos ax}=\frac{1}{a}\ln\left(\tan ax+\frac{1}{\cos ax}\right)+C$;

ב. מצאו פתרון של המשוואה הנתונה עם תנאי התחלה $y(0)=A,\ y'(0)=B$ עבור $A,B\in\mathbb{R}$ נתונים. עבור אילו ערכים של A,B מתקבל פתרון מסעיף א'?

פתרון : הומוגנית

$$\lambda^2+9=0$$
$$\lambda=\pm 3i$$
$$y_c=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$$

לא הומוגנית

$$\begin{pmatrix}\cos 3t & \sin 3t\\ -3\sin 3t & 3\cos 3t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{9}{\cos^2 3t}\end{pmatrix}$$

$$\Delta=3$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin 3t\\ \frac{9}{\cos^2 3t} & 3\cos 3t\end{vmatrix}=-\frac{9\sin 3t}{\cos^2 3t}\Rightarrow C_1'=-\frac{3\sin 3t}{\cos^2 3t}\Rightarrow C_1=\int\frac{d\cos 3t}{\cos^2 3t}=-\frac{1}{\cos 3t}+K_1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos 3t & 0\\ -3\sin 3t & \frac{9}{\cos^2 3t}\end{vmatrix}=\frac{9\cos 3t}{\cos^2 3t}=\frac{9}{\cos 3t}\Rightarrow C_2'=\frac{3}{\cos 3t}\Rightarrow C_2=\ln\frac{\sin 3t+1}{\sin 3t-1}+K_2$$

$$y=K_1\cos 3t+K_2\sin 3t-1+\sin 3t\cdot\ln\left(\tan 3t+\frac{1}{\cos 3t}\right)$$

עבור K1=K2=0 מתקבל הפתרון הנתון.

ב.

$$y=K_1\cos 3t+K_2\sin 3t-1+\sin 3t\cdot\ln\left(\tan 3t+\frac{1}{\cos 3t}\right)$$

$$y(0)=K_1-1=A\Rightarrow\ K_1=A+1$$

$$y'=-3K_1\sin 3t+3K_2\cos 3t+3\cos 3t\cdot\ln\left(\tan 3t+\frac{1}{\cos 3t}\right)+\sin 3t\cdot\left(\frac{3}{\cos^2 3t}+\frac{3\sin 3t}{\cos^2 3t}\right)$$

$$y'(0)=3K_2=B\ \Rightarrow\ K_2=\frac{B}{3}$$

$$y=(A+1)\cos 3t+\frac{B}{3}\sin 3t-1+\sin 3t\cdot\ln\left(\tan 3t+\frac{1}{\cos 3t}\right)$$

פתרון בסעיף א מתקבל עבור A=-1 ו - B=0 .

שאלה 3 . (32 נקודות)

א. בהינתן $y_1(x)$, $y_2(x)$ ו- $y_3(x)$ - פתרונות פרטיים בלתי תלויים ליניארית של המשוואה $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=g(x)$, כאשר $a(x),b(x),c(x)$ - פונקציות רציפות ו- $a(x)\neq 0$ בכל ה- $\mathbb{R}$.

i. הוכיחו כי $u_1(x)=y_1(x)-y_2(x)$ ו- $u_2(x)=y_2(x)-y_3(x)$ מהוות קבוצה יסודית של פתרונות למשוואה $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$;

ii. רשמו את פתרון כללי למשוואה ההומוגנית באמצעות $y_1(x)$, $y_2(x)$ ו- $y_3(x)$.

ב. נתון כי הפונקציות $y_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $y_2(x)=\frac{1+\cos 3x}{\sqrt{x}}$ הן שני פתרונות של המשוואה $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=h(x)$.

i. מצאו את $h(x)$;

ii. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$.

ג. מצאו את צורת פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית הבאה (אין צורך לחשב את המקדמים) : $y^{(5)}+8y'''+16y'=x\left(4+\cos 2x\right)$.

פתרון א :

i.

$$a(x)y_1''+b(x)y_1'+c(x)y_1=g(x)$$
$$-$$
$$\underline{a(x)y_2''+b(x)y_2'+c(x)y_2=g(x)}$$
$$a(x)\left(y_1-y_2\right)''+b(x)\left(y_1-y_2\right)'+c(x)\left(y_1-y_2\right)=0$$

$$a(x)y_2''+b(x)y_2'+c(x)y_2=g(x)$$
$$-$$
$$\underline{a(x)y_3''+b(x)y_3'+c(x)y_3=g(x)}$$
$$a(x)\left(y_2-y_3\right)''+b(x)\left(y_2-y_3\right)'+c(x)\left(y_2-y_3\right)=0$$

בכך הוכחנו ש $u_1(x)=y_1(x)-y_2(x)$ ו- $u_2(x)=y_2(x)-y_3(x)$ מהוות פתרונות למשוואה $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$.

נניח בשלילה שקיימים k שונה מאפס כך ש $\left(y_1(x)-y_2(x)\right)=k\left(y_2(x)-y_3(x)\right)$.

$$\left(y_1(x)-y_2(x)\right)=k\left(y_2(x)-y_3(x)\right)$$
$$y_1(x)-\left(k+1\right)y_2(x)+ky_3(x)=0$$

מצד שני, כל צירוף ליניארי של $y_1(x)$, $y_2(x)$ ו- $y_3(x)$ הוא פתרון של $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=g(x)$. בפרט , $y(x)=y_1(x)-\left(k+1\right)y_2(x)+ky_3(x)$. מכאן, $g(x)=0$ בסתירה לנתון.

ii. $y(x)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)=C_1\left(y_1(x)-y_2(x)\right)+C_2\left(y_2(x)-y_3(x)\right)$

פתרון ב :

פתרון. לחישוב $h(x)$ נציב למשוואה את הפתרון הראשון $y_1(x)$. נקבל

$$h(x) = x^2(x^{-1/2})'' + x(x^{-1/2})' + (x^2 - \frac{1}{4})\, x^{-1/2} = x^{3/2} = x\sqrt{x}\,.$$

ההפרש $y_2(x) - y_1(x)$ הינו פתרון של המשוואה ההומוגנית. אחרי חילוק במספר קבוע נקבל $y_{h1} = \cos x/\sqrt{x}$. את הפתרון השני $y_{h2} = \sin x/\sqrt{x}$ אפשר לקבל ע"י "ניחוש ובדיקה" כי במשוואות ליניאריות $\sin$ ו־ $\cos$ בדרך כלל נפגשים ביחד. אחרת ניתן להשתמש בנוסחה

$$y_{h2} = y_{h1} \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_{h1}^2}\, dx$$

כאשר $p(x) = x/x^2 = 1/x$. כתוצאה נקבל פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית

$$y(x) = C_1 y_{h1}(x) + C_2 y_{h2}(x) = \; C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \; + \; C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,.$$

פתרון ג :

ב) (9%) מצאו בעזרת שיטת השוואת המקדמים צורת פתרון פרטי של המשוואה

$$y^{(5)} + 8y''' + 16y' = x(4 + \cos 2x)$$

ללא חישוב מפורש של המקדמים.

פתרון. המשוואה האופיינית כאן

$$k^5 + 8k^3 + 16k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k(k^2+4)^2 = 0\,,$$

כך ששורשיה הם $k_1 = 0$ (שורש פשות) ו־ $k_{2,3} = \pm 2i$ (אם הריבוי $m = 2$).

נציג את הצד הימין של המשוואה כסכום של שני מחוברים: $4x + x\,\cos 2x$.

אזי את הפתרון הפרטי $y_p(x)$ גם צריך לחפש כסכום של שני תת־פתרונות:

$$y_{p1}(x) = (Ax + B)\cdot x\,,\;\; y_{p2}(x) = (Cx + D)\cos 2x \cdot x^2 + (Ex + F)\sin 2x \cdot x^2\,,$$

כך שהתשובה הסופית היא

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx) + (Cx^3 + Dx^2)\cos 2x + (Ex^3 + Fx^2)\sin 2x\,.$$

שאלה 4 . (20 נקודות)

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}\alpha-1 & 1\\ -1 & \alpha+1\end{pmatrix}$ עבור $\alpha\in\mathbb{R}$.

א. מצאו את פתרון כללי של המערכת $\bar{x}'(t)=A\bar{x}(t)$;

ב. מצאו את פתרון כללי של המערכת $\bar{x}'(t)=A\bar{x}(t)+\begin{pmatrix}t\\ t+1\end{pmatrix}e^{t}$

א. (10 נק') מצאו פתרון כללי למערכת $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}$.

נחפש פתרון מהצורה $\vec{x}=\vec{v}e^{rt}$

ונקבל בעיית ערכים עצמיים $A\vec{x}=\dot{\vec{x}}=r\vec{x}$

שורשי הפולינום האופייני של A מקיימים

$$0=\det(A-rI)=\begin{vmatrix}(\alpha-1)-r & 1\\ -1 & (\alpha+1)-r\end{vmatrix}=$$

$$=(\alpha^2-1)-2\alpha r+r^2+1=(\alpha-r)^2$$

כלומר הערכים העצמיים של A הם $r\equiv r_1=r_2=\alpha$

המרחב העצמי של $r=\alpha$ הוא

$$V_\alpha=\text{null}(A-\alpha I)=\text{null}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר עבור הע"ע $r=\alpha$ קיבלנו ו"ע יחיד $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

שמתאים לפתרון היסודי $\vec{x}_1=\vec{v}_1e^{rt}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{\alpha t}$

מאחר והריבוי האלגברי של הע"ע α הוא 2, עלינו למצוא ו"ע מוכלל $\vec{v}_2$

וקטור זה מקיים $(A-\alpha I)\vec{v}_2=\vec{v}_1$

נסמן $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ ונחשב $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=(A-\alpha I)\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-a\\ b-a\end{pmatrix}$

כלומר צריך להתקיים $b-a=1$ ופרט לכך יש לנו חופש בחירה.

נבחר לדוגמא $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

הפתרון היסודי המתאים ל $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ הוא

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{rt} = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]e^{\alpha t} = \begin{pmatrix}t\\t+1\end{pmatrix}e^{\alpha t}$$

ואז הפתרון הכללי למערכת $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ הוא

$$\boldsymbol{\vec{x}_h} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 = \boldsymbol{c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{\alpha t} + c_2\begin{pmatrix}t\\t+1\end{pmatrix}e^{\alpha t}}$$

הפתרון היסודי המתאים ל $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ הוא

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{rt} = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]e^{\alpha t} = \begin{pmatrix}t\\t+1\end{pmatrix}e^{\alpha t}$$

ואז הפתרון הכללי למערכת $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ הוא

$$\boldsymbol{\vec{x}_h} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 = \boldsymbol{c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{\alpha t} + c_2\begin{pmatrix}t\\t+1\end{pmatrix}e^{\alpha t}}$$

וריאציות נפוצות לפתרון:

- נשים לב ש $\begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 \\ -1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 + 1 = \alpha^2$

הוא הפולינום האופייני במשתנה α של המטריצה $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

משום ש $\det A = \det(\alpha I - B) = p_B(\alpha)$

ולכן הפ"א של A הוא $p_A(r) = (\alpha - r)^2$

- מאחר ו $(A - \alpha I)\vec{v}_1 = 0$ ניתן למעשה לבחור כוקטור עצמי מוכלל כל וקטור

מהצורה $\vec{v}_2 + c\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

מכאן למעשה מגיע חופש הבחירה.

בפרט בחירות נפוצות נוספות ל $\vec{v}_2$ היו $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. היתרון שבבחירה ב $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

הוא בכך שברור במקרה של $\alpha = 1$ שהאיבר הלא הומוגני הוא מצורה של

פתרון יסודי ולכן נצפה לפתרון מצורה אחרת מאשר כאשר $\alpha \neq 1$

ב. **(15 נק')** מצאו פתרון כללי למערכת $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} \cdot e^t$.

נשתמש בוריאציית פרמטרים למציאת פתרון מסוים של המערכת הלא הומוגנית

נסמן את האיבר החופשי $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} e^t$

את הפתרון לבעיה ההומוגנית ניתן לכתוב גם ככפל מטריצה בוקטור קבוע:

$$\vec{x}_h = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 = (\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \equiv X(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

כאשר $X(t)$ היא מטריצת הפתרונות היסודיים, ובמקרה שלנו:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ e^{\alpha t} & (t+1)e^{\alpha t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} e^{\alpha t}$$

נחפש לבעיה פתרון מסוים מהצורה $\vec{x}_p = X(t)\vec{u}(t) = X(t)\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$

מהצבה במד"ר נקבל $X\dot{\vec{u}} = X\begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \vec{g}$

אפשרות אחת לפתרון היא להפוך את X ואז $\begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = X^{-1}\vec{g}$

מטריצה 2×2 קל להפוך: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

נחשב $|X| = e^{2\alpha t}\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{vmatrix} = e^{2\alpha t}$

ומכאן $\begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = X^{-1}\vec{g}$

$$= e^{-2\alpha t}e^{\alpha t}\begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-\alpha)t}$$

אינטגרציה $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \dot{u}_1(t) \\ \int \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \int X^{-1}\vec{g} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int e^{(1-\alpha)t} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{cases} \mathrm{t} & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} e^{(1-\alpha)t} & \alpha \neq 1 \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

מכאן $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}} = X(t)\vec{u}(t) = (\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u(t) = \vec{x}_2 u(t) =$

$$= \begin{pmatrix}t\\t+1\end{pmatrix}e^{\alpha t}u(t) = \boldsymbol{e^t}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\\boldsymbol{t+1}\end{pmatrix}\begin{cases}\mathbf{t} & \boldsymbol{\alpha = 1}\\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}} & \boldsymbol{\alpha \neq 1}\end{cases}$$

והפתרון הכללי הוא $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{h}} + \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}}$

<u>הערה</u>: שימו לב שלמעשה באינטגרציה בחרנו את קבועי האינטגרציה להיות 0.
לו שמרנו את קבועי האינטגרציה בצורה כללית, היינו מקבלים ישירות את $\vec{x}$ במקום $\vec{x}_p$

<u>וריאציה לפתרון</u> – <u>פתרון המערכת $X\dot{\vec{u}} = \vec{g}$ בעזרת כלל קרמר</u>:

$$|X| = e^{2\alpha t}$$

$$|X_1| = |\vec{g} \quad col_2(X)| = \begin{vmatrix}te^t & te^{\alpha t}\\(t+1)e^t & (t+1)e^{\alpha t}\end{vmatrix} = t(t+1)\begin{vmatrix}e^t & e^{\alpha t}\\e^t & e^{\alpha t}\end{vmatrix} = 0$$

$$|X_2| = |col_1(X) \quad \vec{g}| = e^{(1+\alpha)t}\begin{vmatrix}1 & t\\1 & t+1\end{vmatrix} = e^{(1+\alpha)t}$$

מכאן, כמו קודם $\dot{u}_1(t) = |X_1|/|X| = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0$

$$\dot{u}_2(t) = |X_2|/|X| = e^{(1-\alpha)t}$$

<u>וריאציה לפתרון</u> – <u>ו"ע מוכללים אחרים</u>:

עבור הו"ע המוכלל $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}c\\1+c\end{pmatrix}$ נקבל פתרון יסודי $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}t+c\\t+1+c\end{pmatrix}e^{\alpha t}$

נקבל $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-c\\1\end{pmatrix}u(t)$

ומכאן $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}} = X(t)\vec{u}(t) = (-c\cdot\vec{x}_1 + \vec{x}_2)u(t) =$

$$= \left(-c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t+c\\t+1+c\end{pmatrix}\right)e^{\alpha t}u(t) = \begin{pmatrix}t\\t+1\end{pmatrix}e^{\alpha t}u(t)$$

שאלה 5 . (20 נקודות)

א. מהו הפתרון של הבעיה התחלה $y''+y'+\frac{5}{4}y=u_{\frac{\pi}{2}}(t)\left(t-\frac{\pi}{2}\right),\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0$

בקטע $[0,1]$?

ב. מצאו פתרון של בעיית התחלה $y''+y'+\frac{5}{4}y=t-u_{\frac{\pi}{2}}(t)\left(t-\frac{\pi}{2}\right),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$

פתרון א :

$$u_{\frac{\pi}{2}}(t)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0,\ t<\frac{\pi}{2}\\ t-\frac{\pi}{2},\ t\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

לכן, עבור קטע נתון, אגף ימין שווה לאפס ומתקבלת משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועיים עם תנאי התחלה באפס. לפי משפט, הפתרון היחיד של בעית התחלה כזאת הוא y=0 .

פתרון ב :

$$.s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-sy(0)+5/4Y(s)=1/s^2-e^{-\pi/2}/s^2;$$

נציב תנאי התחלה:

$$.Y(s)[s^2+s+5/4]=1/s^2-e^{-\pi/2}/s^2$$

$$.Y(s)=\frac{1}{s^2((s+1/2)^2+1)}-\frac{e^{-\pi/2}}{s^2((s+1/2)^2+1)}(*)$$

נפרק את האיבר הראשון לשברים פשוטים:

$$.\frac{1}{s^2((s+1/2)^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{((s+1/2)^2+1)}$$

$$A=-\frac{16}{25};B=\frac{20}{25};C=\frac{16}{25}:D=-\frac{4}{25}$$

$$.\frac{1}{s^2((s+1/2)^2+1)}=\frac{-16/25}{s}+\frac{20/25}{s^2}+\frac{16/25(s)-4/25}{((s+1/2)^2+1)}$$

$$.\frac{1}{s^2((s+1/2)^2+1)}=\frac{-16/25}{s}+\frac{20/25}{s^2}+\frac{16/25(s+1/2-1/2)-4/25}{((s+1/2)^2+1)}$$

ולאחר התמרה הפוכה נקבל

$$y_1=-\frac{16}{25}+\frac{4}{5}t+\frac{16}{25}e^{-t/2}\cos t-\frac{24}{50}e^{-t/2}\sin t$$

לגבי מחובר שני בביטוי(*) על ידי התמרת לפלס נקבל את אותה פונקציה עם הזזה

$$y_2=u_{\pi/2}(t)y_1(t-\pi/2)$$

אז תשובה סופות היא

$$y=y_1-y_2$$