תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow$ $A'\subseteq A$.

ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי R:

1. Q,
2. $(0,1)$.

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S\subseteq X$ תת קבוצה ו-$x\in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. $x\in S-S'$ (הפרש קבוצות).

ב. קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$.

ג. לכל סדרה $\{x_n\}\subseteq S$, אם $x_n\to x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

שאלה 3

א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X. הוכיחו ש-A תת מרחב מטרי שלם.

ב. יהי X מ"מ ו- $A\subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X. הראו ש-A תת קבוצה סגורה של X.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם X מ"מ שלם, ו- $f:X\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, אזי $f(X)$ תת מרחב שלם של R .

שאלה 4

נסמן ב-A' את אוסף נקודות ההצטברות של A ; נסמן ב-A'' את אוסף נקודות ההצטברות של A' וכן הלאה.

יהי (X,d) מ"מ, תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל-$x\in X\setminus A$ כאשר $A=\{x_n\}$.

א. מצאו את A', A''.

ב. האם A קומפקטי?

ג. האם $A\cup\{x\}$ קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים**!

<u>שאלה 5</u>

יהי X מ"מ ויהי Y אוסף אינסופי בן מניה של נקודות מתוך X, כך שלכל שתי נקודות שונות $a,b\in Y$ מתקיים $2\geq d(a,b)\geq 1$. הוכיחו:

א. Y סגור וחסום ב- X.
ב. האם Y תת מרחב קומפקטי (ביחס למטריקת תת המרחב)?

<u>שאלה 6</u>

<u>בתרגיל זה תוכיחו כי כל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.</u>

יהי (X,d) מ"מ**.** נגדיר שתי מטריקות על X **:** $\tilde{d},\rho$.

$$\rho(x,y)=\min\{d(x,y),1\}\quad,\quad \tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$ לכל $x,y\in X$ **.**

א. הוכיחו כי אלה אכן מטריקות.
(במידה ועשיתם זאת באינפי' 3 – אין צורך שתעשו שוב. אם לא עשיתם – זה תרגיל טוב.)

ב. הוכיחו כי המטריקות הן חסומות.
<u>הערה</u>: מטריקה ρ נקראת "חסומה" אם קיים $r>0$ כך שלכל x,y מתקיים $\rho(x,y)\leq r$ (שקול להגדרות שניתנו בתרגול האחרון).

ג. הוכיחו כי d, $\tilde{d}$ ו- ρ שקולות.

<u>שאלה 7</u>

יהי (X,d) מ"מ קומפקטי. תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ סדרה בעלת גבול חלקי יחיד לכל היותר. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: ראשית הראו שלסדרה אכן קיים גבול חלקי $a \in X$. כעת הניחו בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל-a ובנו תת סדרה $\left\{x_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש-$d\left(x_{n_k},a\right)\geq\varepsilon$. מכאן הגיעו לסתירה.

בהצלחה!