

פתרון בוחן בלינארית 2

88-113 סמסטר ב' תשע"ט

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק.
משך הבוחן: 90 דקות.
חומר עזר: מחשבון פשוט.

שאלה 1. חשבו את הדטרמיננטות הבאות:

$$(א) \begin{vmatrix} 123 & 32 & -17 & -25 \\ 326 & -36 & 26 & -18 \\ -2 & 32 & 58 & 260 \\ 121 & 64 & 41 & 235 \end{vmatrix}$$

$$(ב) \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & & 1 & 0 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

פתרון.

(א) נשים לב כי סכום השורה הראשונה והשלישית שווה לשורה הרביעית, ולכן המטריצה לא הפיכה, והדטרמיננטה שווה אפס. בצורה מפורטת יותר:

$$\begin{vmatrix} 123 & 32 & -17 & -25 \\ 326 & -36 & 26 & -18 \\ -2 & 32 & 58 & 260 \\ 121 & 64 & 41 & 235 \end{vmatrix} \quad R_1 + \underline{\underline{R_3}} \rightarrow R_3$$

$$\begin{vmatrix} 123 & 32 & -17 & -25 \\ 326 & -36 & 26 & -18 \\ 121 & 64 & 41 & 235 \\ 121 & 64 & 41 & 235 \end{vmatrix} \quad R_3 - \underline{\underline{R_4}} \rightarrow R_4$$

$$\begin{vmatrix} 123 & 32 & -17 & -25 \\ 326 & -36 & 26 & -18 \\ 121 & 64 & 41 & 235 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(ב) אם $n = 0$, נקבל מטריצה מגודל 1 שהאיבר היחיד בה הוא אפס, ולכן הדטרמיננטה תהיה אפס. אחרת, נדרג:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_{i+1} \rightarrow R_1}$$

$$\begin{vmatrix} n-1 & n-1 & \cdots & & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{n-1} R_1 \rightarrow R_1}$$

$$(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{i+1} - R_1 \rightarrow R_{i+1}}$$

$$(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

שאלה 2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הוכיחו **3 מתוך 4** הטענות הבאות:

(א) נניח כי סכום כל שורה ב A הוא α , אזי α ערך עצמי של A .

(ב) נניח כי $AA^t = I$, אזי $|A| = \pm 1$.

(ג) נניח כי A הפיכה אזי גם $adj A$ הפיכה.

(ד) נניח כי $A^2 = A$ וגם $|A| \neq 0$ אזי $A = I$.

פתרון.

(א) נסמן $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ונתבונן בוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

מתקיים כי

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha v$$

לכן α ע"ע של A עם וקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ב)

$$AA^t = I \implies |AA^t| = |I| = 1 \implies$$

$$|A| |A^t| = |A|^2 = 1 \implies |A| = \pm 1$$

(ג) A הפיכה ולכן $|A| \neq 0$. כיוון ש

$$A \cdot adj A = adj A \cdot A = |A| I$$

$$(|A| \neq 0) \Downarrow$$

$$\frac{A}{|A|} adj A = adj A \frac{A}{|A|} = I$$

ולכן $adj A$ הפיכה, וההופכית שלה היא $\frac{1}{|A|} A$.

(ד) נתון $|A| \neq 0$ ולכן A הפיכה וקיימת לה מטריצה הופכית A^{-1} . לכן,

$$A^2 = A \implies A^2 - A = 0 \implies$$

$$A(A - I) = 0 \implies A - I = A^{-1}0 = 0 \implies$$

$$A = I$$

כדרוש.

שאלה 3. מצאו ערכים עצמיים, ווקטורים עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון.

נמצא ערכים עצמיים.

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & -3 \\ 5 & \lambda + 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 4) = 0$$

כאשר חישוב הדטרמיננטה נעשה ע"י פיתוח לפי שורה שלישית.

לכן, הע"ע הם $\lambda = -1, 4$.

עבור $\lambda = -1$ נמצא ו"ע, כלומר את מרחב האפס של $-1I - A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן את המשתנה החופשי $y = t$ ונקבל ש $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ הוא המרחב העצמי הקשור

$$\text{לע"ע } \lambda = -1, \text{ ובפרט } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ו"ע.}$$

עבור $\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן את המשתנה החופשי $z = t$ ונקבל ש $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5}t \\ -\frac{1}{5}t \\ t \end{pmatrix} \right\}$ הוא המרחב העצמי הקשור

$$\text{לע"ע } \lambda = 4, \text{ ובפרט } \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ו"ע.}$$