פתרון תרגיל בית 7- מופשטת 1

<u>שאלה 1</u>

א) חשבו את aba^{-1} עבור: (1) $a=(1\ 3\ 5)(1\ 2)$ ו- $b=(1\ 5\ 7\ 9)$.

(2) $a=(1\ 3\ 8)$ ו- $b=(1\ 8\ 3\ 9)$.

ב) מצאו גודל של מחלקת צמידות $[\beta]=\{g^{-1}\beta g:\ \ g\in S_{15}\}$ של האיבר $\beta=(3,2,6,9)$ ואת סדר המייצב של β (תחת הצמדה).

ג) תהי $H\le S_9$ תת חבורה הנוצרת על ידי $(123)(789)$ ו-(345). נניח ש- H פועלת (הפעולה הטבעית) על $X=\{1,2,3,...,9\}$. כמה מסלולים יש לפעולה זו ומהו סדרם של מסלולים אלו?

<u>פתרון</u>

א)

(1) $aba^{-1}=\left(a(1)\,a(5)\,a(7)\,a(9)\right)=(2179)$

(2) באותו האופן, $aba^{-1}=(3\,1\,8\,9)$

ב) (<u>הערה לגבי סימונים</u>: $orb(a)=G*a$)

למעשה אנו מתבוננים בפעולה של S_{15} על עצמה ע"י הצמדה. גודל מסלול ההצמדה של β הוא מספר האיברים בחבורה אשר צמודים לה; משמע, מספר המחזורים מאורך 4. מתקיים: $|S_{15}*\beta|=|conj(\beta)|=\binom{15}{4}(4-1)!=8190$.

את סדר המייצב ניתן לחשב מהמשפט: $|G*x|=\left[G:Stb(x)\right]$. מקבלים:

$|Stb(\beta)|=\frac{15!}{8190}=159,667,200$.

ג) קל לראות שקיימים שלושה מסלולים: האחד $\{1,2,3,4,5\}$ מגודל 5, השני $\{6\}$ מגודל 1 והשלישי $\{7,8,9\}$ מגודל 3. הסבר: מהגדרת H נובע שלכל $\sigma\in H$ $\sigma(6)=6$ לכן $orb(6)=\{6\}$. התמורה $(345)\in H$ מעבירה את 3 ל 4 ואת 4 ל5 ומכיון שהמסלולים הם מחלקות שקילות של X $3,4,5\in orb(3)$. מכיון שהתמורה $(123)(789)\in H$ נקבל ש גם $1,2\in orb(3)$. משיקולים דומים $7,8,9\in orb(7)$. לבסוף שימו לב שמהגדרת H אף תמורה ב H לא מעבירה איבר מ $\{1,2,3,4,5\}$ לאיבר בקבוצה $\{7,8,9\}$ (מדוע?). מכך נסיק שהמסלולים הינם כפי שצויינו.

<u>שאלה 2</u>

א) כמה מחלקות צמידות יש בחבורה S_6?

ב) תהא $G=S_4$ הפועלת על הקבוצה $X=\{1,2,3,4\}$ ע"י $g*x=g(x)$. חשבו את המייצב של $x=2$. האם המייצב של $x=2$ הוא ת"ח נורמלית של G? נמקו.

<u>פתרון</u>

א) כפי שראינו מחלקות הצמידות ב-S_n הן קבוצות המכילות את כל התמורות בעלות אותו מבנה מחזורים. לכן מספיק לספור כמה מבני מחזורים יש. תשובה: 11.

ב) המייצב של $x=2$ הוא התמורות שלא מזיזות את 2, כלומר: $A=\{id,(13),(14),(34),(134),(143)\}$. המייצב אינו תת חבורה נורמלית שכן, למשל, $(12)(13)(12)=(23)\notin A$.

<u>שאלה 3</u>

תנו דוגמא לפעולה נאמנה של חבורה לא טריוויאלית G על קבוצה X עם איבר $x\in X$ כך ש-$Stab(x)=G_x=G$. תזכורת: פעולה היא נאמנה אם רק איבר היחידה פועל באופן טריוויאלי.

<u>פתרון</u>

נבחר $G=X$ כאשר G היא חבורה לא טריוויאלית עם מרכז טריויאלי, למשל $G=D_3$. ונתבונן בפעולת ההצמדה $g*x=gxg^{-1}$. עבור $id\in X$ מתקיים לכל $g\in G$ $g*id=g(id)g^{-1}=id$ כלומר $Stab(id)=G$. נראה שזוהי פעולה נאמנה. יהי $g\neq id$, יש להראות שקיים $x\in X$ כך ש $g*x=gxg^{-1}\neq x$. תנאי זה אכן מתקיים שכן $g\neq id$ ומכאן $g\notin Z(D_3)$ ולכן קיים $x\in G=X$ כך ש $gx\neq xg$ ומכאן $gxg^{-1}\neq x$.

<u>שאלה 4</u>

תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל $1\neq x\in G$, x אינו צמוד להופכי שלו.

<u>פתרון</u>

יהי $1\neq x\in G$ ונניח בשלילה שהוא צמוד לעצמו, כלומר $x^{-1}\in conj(x)$. לכן מחלקת השקילות של x מכילה לפחות שני איברים. היא אינה יכולה להיות מסדר זוגי (כי סדרה חייב לחלק את סדר החבורה) ולכן קיים $y\neq x,x^{-1}$ שנמצא במחלקת השקילות של x. נניח בה"כ ש- y צמוד ל-x. לכן y^{-1} צמוד ל-x^{-1} (מדוע?) ולכן גם $y^{-1}\in conj(x)$. ושוב יש מספר זוגי של איברים (וודאו ש-y^{-1} אכן שונה מכל האיברים במחלקה). ממשיכים בתהליך דומה עד אשר "נגמרים" האיברים בחבורה, ואנחנו נשארים עם סתירה. ☺

<u>אולי שאלת בונוס</u>

א. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. תהי H תת חבורה נורמלית כלשהי של G. נגדיר $X_H=\{x\in X:\ hx=x\ \ \forall h\in H\}$. הוכיחו ש-$G$ משאירה את X_H במקום (כלומר: $\forall x\in X_H\ \ gx\in X_H$).

ב. D_4 פועלת על קודקודי ריבוע בדרך הרגילה. פעולה זו מגדירה גם פעולה על כל הזוגות הלא-סדורים של קודקודים, 12,13,14,23,24,34. מצאו את הקבוצה X_H כאשר H היא מרכז החבורה, ואשרו שהחבורה שומרת על קבוצה זו במקומה, למרות שהנקודות שלה אינן נקודות שבת משותפות לכל אברי החבורה.

<u>פתרון</u>

א. יהיו $g \in G$ $x \in X_H$. נראה ש $gx \in X_H$. מהגדרת X_H נובע שעלינו להראות ש $h(gx) = gx$ לכל $h \in H$. לצורך זה יהי $h \in H$. מכיון שמדובר בפעולה מתקיים $h(gx) = (hg)x$. כעת, H תת חבורה נורמלית של G ולכן קיים $h' \in H$ כך ש $hg = gh'$. מכאן $(hg)x = (gh')x$. שוב מכיון שמדובר בפעולה נקבל ש $(gh')x = g(h'x)$. נשים לב ש $h' \in H$ ו $x \in X_H$ ומכאן $h'x = x$ ולכן $g(h'x) = gx$. בסה"כ נקבל $h(gx) = gx$ כדרוש.

ב. $H = Z(D_4) = \{\sigma^2, id\}$. אוסף הזוגות הלא סדורים מייצג את צלעות הריבוע ואלכסוני הריבוע (ללא כיוון) שקדקדיו ממוספרים ב- $1,2,3,4$ לפי הסדר (נניח בסידור נגד כיוון השעון). הפעולה של D_4 היא כמובן סיבובים ושיקופים. כדי לבחון מהי הקבוצה X_H מספיק לראות אלו צלעות/אלכסונים נשארים במקום תחת פעולת σ^2 (כלומר סיבוב ב-180 מעלות). קל לראות שכל הצלעות בסיבוב של 180 מעלות ישנו את מיקומן ואילו האלכסונים ישארו במקומם לכן $X_H = \{13, 24\}$. כדי להראות שהחבורה שומרת על קבוצה זו במקומה מספיק להראות שהיוצרים σ, τ משאירים את הקבוצה במקומה. קל לראות ש σ, τ מעבירים אלכסון אחד לשני כלומר $\sigma(13) = \tau(13) = 24 \;\; ; \;\; \sigma(24) = \tau(24) = 13$, ולכן משאירים את X_H במקומה. כמו כן מכאן ניתן לראות שאיברי X_H אינן נקודות שבת של σ ו τ ולכן אינן נקודות שבת משותפות של D_4.

<u>שאלת רשות חביבה</u> (ללא ניקוד וללא בדיקה)

תהי G חבורה מסדר p^n עבור p ראשוני ו-$n \geq 1$. תהי $\{1\} \neq N \lhd G$. הוכיחו ש- $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.

<u>פתרון</u>

קיים $1 < k \leq n$ כך ש- $|N| = p^k$. מכיוון ש- N תח"נ, היא איחוד (זר) של מחלקות הצמידות שלה. מהם הסדרים האפשריים של המחלקות? חזקות של p. נשים לב ש- $conj(1) = \{1\}$ וזאת מחלקת צמידות מסדר 1. מתקיים

$N = \{1\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{t} conj(x_i) \right)$ ולכן $p^k = |N| = 1 + \sum_{i=1}^{t} |conj(x_i)| = 1 + \sum_{i=1}^{t} \beta_i p^{\alpha_i}$ כאשר β_i זה מספר המחלקות מסדר p^{α_i} (עבור $0 \leq \alpha_i \leq k$). נניח בשלילה שלכל i מתקיים

$\alpha_i > 0$. נשים לב שמתקיים $p^k - 1 = \sum_{i=1}^{t} \beta_i p^{\alpha_i}$. אך זאת סתירה, מכיוון ש- p מחלק את אגף ימין, ולא את אגף שמאל. לכן קיים i כך ש- $\alpha_i = 0$. כלומר, קיים איבר נוסף ב- N (פרט ליחידה) שמחלקת הצמידות שלו היא בגודל 1, ולכן הוא שייך למרכז. זה מוכיח הדרוש.