

מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 11

בעיה 1

יהי $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

יהי $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D^2 \vee (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

הוכיחו:

$\mathbb{R}^2 / \sim$ הומאומורפי ל- $\mathbb{R}^2$.

בעיה 2

יהי $a \in \mathbb{R}$. יהי $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{R}$ כך ש-

$$x \sim y \Leftrightarrow ((x \geq a) \wedge (y \geq a)) \vee ((x < a) \wedge (y < a))$$

הוכיחו:

$\mathbb{R} / \sim$ אינו הוסדורף.

בעיה 3

יהי $\sim$ יחס שקילות על מ"ט X .

הוכיחו שכל מחלקות השקילות פתוחות אם"ם $X / \sim$ מ"ט דיסקרטי

בעיה 4

א' נתון מ"ט דיסקרטי.

הוכיחו שהמרחב קומפקטי אם"ם הוא סופי.

ב' נתון מ"ט סופי והאוסדורף.

הוכיחו שהמרחב דיסקרטי

בעיה 5

. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ תת קבוצה כך ש- $\overline{A^c} = \mathbb{R}$.
הוכיחו שרכיבי הקשורות של תת מרחב A הם נקודונים.

בעיה 6

א' יהי X מ"ט ויהיו $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ תת מרחבים קומפקטיים.
הוכיחו שגם $A_1 \cup \dots \cup A_n$ קומפקטי.
ב' יהי X מ"ט האוסדורף. יהיו $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ תת מרחבים קומפקטיים.
הוכיחו ש- $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ קומפקטי.