בס"ד **י"א תמוז התשע"ד (9.7.14)**

אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב 89-113
סמסטר ב' תשע"ד – 2014
מועד א'.

זמן הבחינה : 3 שעות.
חומר עזר : מחשבון מדעי פשוט בלבד.

שאלה 1 – חובה.

יש לבחור 3 שאלות מתוך שאלות 2-5.

<u>יש לענות באופן מסודר (!) בגוף השאלון בלבד. המחברת היא רק לטיוטה!</u>
<u>בנוסף, יש להראות כל העבודה הרלוונטי לפתרונות שלכם.</u>

שלום לכולם. הנה פתרונות למבחן. כיוון שסכום הניקוד הוא 80 נקודות במקום 100, אנחנו נכפיל את הציון במבחן ב 1.25 לקבל ציון בין 0 ל 100.

ענה על אחד השאלות הבאות:

א. יהי $(V_F <,>)$ מרחב מכפלה פנימית, כאשר $F=\mathbb{R}$ או $F=\mathbb{C}$.
i. (5) יהי $v\in V$. הגדר הנורמה $\|v\|\in F$.
ii. (15) הוכח את אי-שוויון קושי שוורץ: שלכל $v,w\in V$ מתקיים ש
$$|\langle v,w\rangle|\le\|v\|\|w\| \quad (*).$$

ב. יהי V_F מרחב ווקטורי, $\dim V=n$. תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית.
i. (5) הגדר את שני התת-מרחבים של V: הגרעין $\ker T$, והתמונה $\operatorname{Im} T$.
ii. (15) הוכח ש:
$$\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T=n \quad (*).$$
ניתן להיעזר בחומר הנלמד על מרחבים ווקטורים שאינה תלוי בזהות (*).

קיימים הגדרות והוכחות מפורטות במחברת ההרצאה.

יש לבחור שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות:

2. תהי $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. יהי $(\mathbb{R}^3,<,>)$ המרחב מכפלה פנימית הסטנדרטית.

א. (5) האם A דומה למטריצה אלכסונית? הסבר.

ב. (10) מצא מטריצה $P\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש $P^TAP=\Lambda$ כאשר Λ היא מטריצה אלכסונית.

ג. (5) בעזרת תשובתכם לסעיף א', מצאו $B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש $B^TB=A$.

א. A היא מטריצה סימטרית, ולכן ל A יש בסיס של ווקטורים עצמיים אורתונורמליים שנותנים לכסון אורתוגונלי $P^TAP=\Lambda$, כאשר Λ היא המטריצה עם ערכים עצמיים על האלכסון.

ב. נבחר בסיס של ווקטורים עצמיים ניצבים זה לזה וגם מנורמלים ונציב אותם כעמודות P. הפולינומים האופייני היא:

$p_A(A)=|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-1)$.

לכן הערכים העצמיים ל A הם $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$. כווקטורים עצמיים מנורמלים ניקח בהתאם לע"ע-ים

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}.$$

ולכן

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\\0&1/\sqrt{3}&-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

ונובע של $\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}=P^TAP$. (שימו לב שגם ניתן לבנות את P מ3 ווקטורים עצמיים ניצבים כלשהם – זה גם עובד)

ג. מסעיף ב' מתקיים ש $A=P\Lambda P^T$. נגדיר

ש $\sqrt{\Lambda}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&&\\&1&\\&&\sqrt{-2}\end{bmatrix}$. נגדיר $B=\sqrt{\Lambda}P^T$ ומתקיים ש$B^TB=A$.

הערה: בשאלה התבקשתם למצוא $B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, וכיוון ש $\sqrt{-2}$ אינה ממשית יוצא ש $B\in\mathbb{C}^{3\times 3}$ מטריצה מרוכבת. אנחנו קיבלנו כל תשובה שהתייחסה לבעיה הזאת—אלה שהסבירו שאין פתרון ממשי, ואלה שתיקנו ניסוח השאלה, ואלה שהתעלמו מהבעיה ש B מרוכבת ופשוט רשמו את B. בכל מקרה, מתוך 5 נקודות בסעיף כל אחת קיבל 2 נקודות מינימום.

3. יהי V_F מרחב ווקטורי, $\dim V=3$.

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^3=0$. נניח כי קיים וקטור $v\in V$ כך ש $T^2(v)\neq 0$.

א. (5) הוכיחו כי $\{v,T(v),T^2(v)\}$ הם בלתי תלויים ליניארית.

ב. (5) מצאו את $\dim\ker T,\dim\operatorname{Im} T$.

ג. (5) מצאו בסיס $\mathcal{B}$ ל V כך ש $[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

ד. (5) האם קיים בסיס $\mathcal{B}$ ל V כך ש $[T]_{\mathcal{B}}$ היא מטריצה אלכסונית? הסבר.

א. נניח ש $av+bT(v)+cT^2(v)=0_V$. נפעיל T^2 לשני צדדי השוויון. כיוון ש $T^3(v)=0$ נשאר השוויון $aT^2(v)=0$. כיוון ש $T^2(v)\neq 0$ נובע ש $a=0$. לכן $bT(v)+cT^2(v)=0$. על ידי הפעלת T לשני הצדדים באופן דומה נמצא ש $b=0$. כנ"ל $c=0$. לכן $a=b=c=0$ והקבוצה בת"ל.

ב. T שולח בסיס לתת-מרחב $\operatorname{Span}\{T(v),T^2(v)\}$, שהוא ממימד 2. $\dim V=3$, כך שמתקיים ש $\dim\operatorname{Ker} T=1,\dim\operatorname{Im} T=2$.

ג. נגדיר $v_1=v,v_2=T(v),v_3=T^2(v)$ ו $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$. בדיקה ישירה מספיקה.

ד. לא. $m_{[T]_{\mathcal{B}}}(x)=x^3$, כאשר $m_{[T]_{\mathcal{B}}}(x)$ הפולינום המינימלי של $[T]_{\mathcal{B}}$, אינה מכפלה של גורמים ליניאריים שונים ולכן $[T]_{\mathcal{B}}$ אינה לכסינה.

4. שימו לב: העתקן את העבודה שלכם באופן מסודר מהמחברת לכאן. תהי A המטריצה:

$$\begin{array}{c}
\qquad A_1 \qquad\qquad\qquad A_2 \qquad\qquad\qquad A_3 \\
A=\begin{pmatrix}
-3&1&-1&&&&&\\
-7&5&-1&&&&0&\\
-6&6&-2&&&&&\\
&&&4&0&1&&\\
&&&0&1&0&&\\
&&&0&0&4&&\\
&0&&&&&-1&-1\\
&&&&&&1&-3
\end{pmatrix}
\end{array}$$

א. (5) מצאו את הפולינום האופייני $p_A(x)$ והפולינום המינימלי של $m_A(x)$.

ב. (5) האם ניתן לשלש את A? הסבר.

ג. (5) מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה A.

ד. (5) בעזרת צורת ג'ורדן **בלבד**, חשבו את הדטרמיננטה של A.

הפתרון מופיע באתר הקורס בפתרון לתרגיל 8.

5. (20) הוכיחו או הפריכו את ~~אחת~~ הטענות הבאות :

א. יהיה V מרחב ווקטורי מעל שדה F. יהיו U,W שני תת מרחבים של V כך ש $U \oplus W = V$. אזי $U = W^{\perp}$.

ב. תהי $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$. טענה: אם U מטריצה אוניטרית אזי גם $adj(U)$ היא מטריצה אוניטרית.

א. (לא נכון) ניקח $V = \mathbb{R}^2$ ו $U = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $W = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$. נשים את המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^2$. מתקיים ש $V = U \oplus W$ ו U,W אינם ניצבים.

ב. (נכון) U היא אוניטרית. מטריצה U היא אוניטרית אם $U^*U = I$ כאשר מסמנים $U^* = \overline{U}^T \left(= \overline{U^T}\right)$. לכן אם U אוניטרית מתקיים ש

$$\left|\overline{U}\right|\left|U\right| = \left|\overline{U^T}\right|\left|U\right| = \left|\overline{U}^T\right|\left|U\right| = \left|U^*\right|\left|U\right| = \left|U^*U\right| = 1.$$

כאן $|U|$ היא הדטרמיננטה של U, כנ"ל $\left|U^T\right|$.

מהנוסחה עבור המטריצה ההופכית מתקיים ש $U^{-1} = \frac{1}{|U|}\text{adj}(U)$. לכן

$U^* = \frac{1}{|U|}\text{adj}(U)$. לכן

$$\text{adj}(U)\left(\text{adj}(U)\right)^* = \left(|U|U^*\right)\left(\overline{|U|}U\right) = \overline{|U|}\,|U|\,\overbrace{U^*U}^{I} = 1\cdot I_n = I_n.$$

ולכן $\text{adj}(U)$ אוניטרית.