תרגיל בית 11 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. מצאו את הצורות הרציונליות קנוניות של המטריצות הבאות מעל $\mathbb{Q}$:

א. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ב. $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{3} \\ -3 & 2 & \frac{1}{3} \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

ג. $C = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 2 & 5 \\ -4 & -7 & 2 & 5 \\ -4 & -5 & 1 & 4 \\ -8 & -12 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

שאלה 2. תהי $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$, ונתייחס ל-$V = \mathbb{Q}^3$ כמודול מעל $\mathbb{Q}[x]$ המושרה מ-A.

א. נרמלו את $xI - A$ (כלומר, מצאו צורה אלכסונית הדומה ל-A).

ב. מצאו $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ כך ש-V איזומורפי (כמודול מעל $\mathbb{Q}[x]$) ל-$\mathbb{Q}[x]/\langle f\rangle \times \mathbb{Q}[x]/\langle g\rangle$.

ג. מצאו את הצורה הרציונלית קנונית של A.

שאלה 3. יהי F שדה. נתבונן במודול $M = F[x]^2/AF[x]^2$ מעל $F[x]$ כאשר $A = \left(\begin{smallmatrix} x & x \\ x & x \end{smallmatrix}\right)$. מהו המימד של M כמרחב וקטורי מעל F?

שאלה 4. מיינו את כל מחלקות הצמידות של מטריצות מעל $\mathbb{Z}$ עם פולינום אופייני $(x-1)^3 \cdot (x^2+2x+2)\cdot(x+3)$.

שאלה 5. מצאו את כל מחלקות הצמידות של מטריצות 5×5 שהפולינום המינימלי שלהן הוא $x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

שאלה 6. תהי $A \in M_3(\mathbb{Z})$. נניח ש-$\mathbb{Q}^3/A\cdot\mathbb{Q}^3$ איזומורפי ל-$\mathbb{Q}$ כמודולים מעל $\mathbb{Q}$. האם $\mathbb{Z}^3/A\cdot\mathbb{Z}^3$ איזומורפי ל-$\mathbb{Z}$ כמודולים מעל $\mathbb{Z}$? הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית.

שאלה 7. נניח שהמרחב הווקטורי V כמודול מעל $\mathbb{C}[x]$ הוא סכום ישר של מודולים ציקליים שהמאפסים שלהם הם $(x+1)^2, (x-1)(x^2+1)^2, x^4-1$. קבעו מיהם הגורמים האינווריאנטים ומיהם המחלקים הראשוניים המתאימים.

שאלה 8. הוכיחו כי המטריצות הבאות צמודות מעל $\mathbb{Q}$, ומצאו מהי צורת ז'ורדן שלהן:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & -7 \\ 3 & -8 & 15 & -13 \\ 2 & -4 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

(מותר להיעזר במחשב על מנת לחשב את הפולינום האופייני והמינימלי של A ו-B.)

שאלה 9. יהיו K, L, M, N מודולים מעל חוג R. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.
רמז: לטענות המקבילות עבור מרחבים וקטורים מעל שדה יש את אותן תשובות.

א. נניח $L, N, K \leq M$ תת־מודולים כך ש-$M = N \oplus K$. אז $L = (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

ב. נניח $N, K \leq M$ תת־מודולים כך ש-$M = N \oplus K$ ו-$N \leq L$.
אז $L = (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

ג. אם $N \subseteq K$, $K + L = N + L$ וגם $K \cap L = N \cap L$, אז $K = N$.

ד. נניח $L, N, K \leq M$ תת־מודולים כך ש-$K + L = N + L$ וגם $K \cap L = N \cap L$, אז $K = N$.

בהצלחה!