

תרגיל 3 אלגברה מופשטת 1

1. נתונה התמורה הבאה ב- S_7 : $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) רשמו אותה כמכפלת מחזורים זרים, ומצאו את הסדר שלה.

(ii) האם $a \in A_7$?

(iii) מה הסדר של a^{20} ?

(iv) רשמו את a^{-1} כמכפלת מחזורים זרים.

2. א. מצא $a \in S_6$ כך ש $a^{-1}(12)(34)a = (56)(13)$.

ב. הראה כי לא קיים $a \in S_8$ כך ש $a^{-1}(123)a = (13)(578)$.

3. נתונה הגדרה חלקית של תמורה $\sigma \in S_9$: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & ? & ? & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

ידוע כי התמורה היא זוגית חשב את $\sigma(4)$ ואת $\sigma(5)$.

4. תהי $\sigma \in S_9$ מסדר 5. עבור כמה $1 \leq k \leq 9$ מתקיים $\sigma(k) = k$?

ממבחן (2010 סמסטר קיץ מועד א)

5. א. הוכח או הפרך: לא קיימת חבורה G ומונומורפיזם $G \rightarrow G$ שהוא לא איזומורפיזם.

ב. הוכח או הפרך: קיים אפימורפיזם $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \Omega_{2010} \times \mathbb{Z}_{999} \times \Omega_{50}$.

ג. מצאו איזומורפיזם $\mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}_+ \times \Omega_2$ ותארו תת חבורה H בחבורה $G := \mathbb{C}^* \times D_{100}$ כך שחבורת מנה

$$G/H \text{ איזומורפית ל } \mathbb{R}^*.$$

ממבחן (2009 סמסטר קיץ מועד ב)

6. תהא $G = S_4$ הפועלת על הקבוצה $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ע"י: $g * x = g(x)$.

א. חשב את המייצב A של $X = 2$.

ב. האם $A \triangleleft G$? נמק.

ג. האם מחלקת הצמידות של כל $\alpha \in A$ מוכלת בתוך A ?

ד. מהי הדרגה של A (ספר האיברים המינימאלי שיכולים ליצור יחד את A)?

7. תהי $G = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\}$ עם הפעולה $(a,b) * (c,d) = (ac, ad + b)$ הראו ש
 $K = \{(a,0) \mid a > 0\}$ היא תת חבורה לא נורמלית ב G .

8. עבור $H \leq G$ נגדיר את המנרמל של H ב G $N(H) := \{g \in G \mid gH = Hg\}$.
 הוכיחו:

א. $N(H) = G \Leftrightarrow H \triangleleft G$ ו $N(H) \leq G$.

ב. $H \triangleleft N(H)$.

ג. אם $H \triangleleft K \leq G$ אזי $K \leq N(H)$.

ד. נתבונן ב S_6 ובקבוצה הבאה: $H = \{\sigma \in S_6 : \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$.

i. הוכיחו ש H היא תת חבורה ושהיא איזומורפית ל S_3 . האם היא תת חבורה נורמלית?

ii. הוכיחו שב $N(H)$ יש שתי תתי חבורות K, L כך ששתיהן איזומורפיות ל S_3 ו

$$K \cap L = id$$

9. א. מצאו את מספר האוטומורפיזמים של \mathbb{Z}_9 ושל \mathbb{Z}_{13} .

ב. מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{13}$.

10. הוכח שאם $\varphi: G \rightarrow G'$ הומומורפיזם ו $a \in \ker \varphi$ אז לכל $g \in G$ $gag^{-1} \in \ker \varphi$.

11. הוכח כי הפונקציות הבאות הינם הומומורפיזמים ומצאו את הגרעין והתמונה.

א. $\varphi: S_n \rightarrow \{-1, 1\}$. $\varphi(a) = \text{sign}(a)$.

ב. $\varphi: (\mathbb{C}, +) \rightarrow (M_2(\mathbb{R}), +)$. $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

ג. $\varphi: (\mathbb{C}^*, *) \rightarrow (GL_2(\mathbb{R}), *)$. $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. בסעיף זה הסבר גם מדוע הפונקציה

מוגדרת היטב.

12. יהיו φ, ψ הומומורפיזמים, ונניח שפעולת ההרכבה $\varphi \circ \psi$ מוגדרת היטב.

א. הוכח שאם φ, ψ אפימורפיזמים אז $\varphi \circ \psi$ אפימורפיזם.

ב. הוכח שאם φ, ψ מונומורפיזמים אז $\varphi \circ \psi$ מונומורפיזם.