

## תרגיל 2 - אינפי 4 תשע"ו.

31 במאי 2016

### 1 מבוא והוראות.

לפני התרגיל כדאי לעבור על ההרצאה ולקרוא את התרגולים 1, 2 ו 3 כפי שמופיעים באתר. אנחנו מודעים שכתובה מסודרת לכמות כזרת של תרגילים גוזלת המון זמן, ולכן אתם רשאים לא להגיש חלקים שסומנו כאופציונליים. בכל תרגיל חישובי - מספיק להגיש 50% (מעגלים למעלה) מהסעיפים. אם זאת, כדאי לנסות לפתור את כולם או לפחות להבין את הפתרונות (חידה: מה מתחיל ב"ב" (מ) ונגמר ב"נ"?...).

### 2 מסילות ואוריינטציה

תרגילים 5 ו 6 בחלק זה הם אופציונליים. תרגיל 5 חשוב - לפחות לקבל את המסקנות שלו. תרגיל 1. הוכח ששקילות מסילות הוא יחס שקילות.

תרגיל 2. הוכח שאם  $\alpha$  ו  $\beta$  מסילות שקולות ב  $\mathbb{R}^n$  ו  $\alpha$  מסילה חלקה, אזי גם  $\beta$  מסילה חלקה.

תרגיל 3. נניח ש  $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ו  $\gamma_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  פרמטריזציות פשוטות וחלקות של העקומה  $\Gamma$  כך ש

$$\begin{aligned}\gamma_1(a) &= \gamma_2(c) \\ \gamma_1(b) &= \gamma_2(d)\end{aligned}$$

1. הוכיחו ש  $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : (a, b) \rightarrow (c, d)$  מוגדרת היטב.

2. הוכיחו ש  $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$  מונוטונית באופן חזק.

3. הוכיחו שאם  $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$  מונוטונית, אזי  $\gamma_1$  ו  $\gamma_2$  שקולות.

לפני פתרון התרגילים הבאים כדאי לקרוא את תחילת פרק 2.

תרגיל 4. תהיינה  $\gamma_1$  ו  $\gamma_2$  פרמטריזציות חלקות וחח"ע של עקומה  $\Gamma$  (בפרט,  $\Gamma$  אינה סגורה). הוכיחו, שאם הן מגדירות את אותה אוריינטציה אזי הן שקולות.

נשים לב, שחח"ע היא וחלקות ההן דרישות חשובות. אם לא היינו דורשים זאת, היינו עלולים לקבל  $x = \gamma(t) = \gamma(s)$  עבור  $s \neq t$ , ואז, אף אחד לא מבטיח, ש  $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$ . כמו כן, עבור עקומות שאינן חלקות, הפונקציה לא בהכרח מוגדרת. ייתכן ש  $\gamma'(t)$  אינה קיימת, או  $\gamma'(t)$  מתאפסת למשל. בתרגיל הבא, נראה כיצד אפשר בכל זאת להתדבר על מגבלה זו.

הגדרה 1. תהי  $\Gamma$  עקומה עם בעלת פרמטריזציה  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  חלקה למקוטעין ופשוטה. הזוג  $(\Gamma, \gamma)$  נקרא עקומה מכוונת. לכל  $\gamma(t) = x \in \Gamma$  וקטור היחידה (שמוגדר במס' סופי של נקודות)

$$T_\gamma(x) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

נקרא אוריינטציה של  $\Gamma$  המושרית על ידי  $\gamma$ .

הגדרה 2. תהי  $\Gamma$  עקומה חלקה,  $\gamma_1$  ו  $\gamma_2$  הצגות פרמטריות פשוטות וחלקות למקוטעין. נאמר ש  $(\Gamma, \gamma_1) = (\Gamma, \gamma_2)$  אם לכל  $x \in \Gamma$  בה שניהם מוגדרים  $T_{\gamma_1}(x) = T_{\gamma_2}(x)$  ונאמר ש  $(\Gamma, \gamma_1) = -(\Gamma, \gamma_2)$  אם בכל נק'  $x \in \Gamma$  בה שניהם מוגדרים,  $T_{\gamma_1}(x) = -T_{\gamma_2}(x)$ . בדרך"כ כאשר ההקשר ברור נרשום  $\Gamma$  או  $-\Gamma$  בהתאמה.

תרגיל 5. תהי  $(\Gamma, \gamma)$  עקומה מכוונת פשוטה וחלקה למקוטעין. תהי  $\tilde{\gamma}$  פרמטריזציה פשוטה חלקה למקוטעין של  $\Gamma$ . הוכיחו שמתקיים או  $(\Gamma, \gamma) = (\Gamma, \tilde{\gamma})$  או  $(\Gamma, \gamma) = -(\Gamma, \tilde{\gamma})$ . כלומר, לכל עקומה פשוטה וחלקה למקוטעין קיימות בדיוק שתי אוריינטציות אפשריות.

תרגיל 6. תהי  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ו  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  הצגות פרמטריות פשוטות, וחלקות למקוטעין של העקומה  $\Gamma$  כך ש ו

$$\begin{aligned}\gamma_1(a) &= \gamma_2(c) \\ \gamma_1(b) &= \gamma_2(d) \\ (\Gamma, \gamma_1) &= (\Gamma, \gamma_2)\end{aligned}$$

הוכיחו או הפריחו:  $\gamma_1$  ו  $\gamma_2$  שקולות.

### 3 אינטגרל קווי מסוג ראשון.

#### 1.3 "תאוריה" וחישובים.

תרגיל 7 ו 8 הם אופצינונליים. עם זאת נשתמש במסקנות שלו בהמשך.

תרגיל 7. תהי  $\Gamma$  עקומה ב  $\mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_1$  ו  $\gamma_2$  פרמטריזציות פשוטות וחלקות למקוטעין,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו:

$$\int_{\gamma_1} f dl = \int_{\gamma_2} f dl$$

במילים אחרות: אינטגרל קווי מסוג ראשון (שם נדרף לאינטגרל לפי אורך עקומה) על עקומה חלקה למקוטעין אינו תלוי בפרמטריזציה של  $\Gamma$ . במילים אחרות, אם  $\Gamma$  ניתן חלקה למקוטעין, אזי ניתן לדבר על

$$\int_{\Gamma} f dl$$

בלי לציין את הפרמטריזציה או אפילו אוריינטציה של  $\Gamma$ .

תרגיל 8. נאמר ש  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  פשוטה למקוטעין, אם היא חח"ע פרט למספר סופי של נקודות. הוכיחו שהטענה של תרגיל 7 נשארת נכונה אם מחליפים "פשוטה" ב "פשוטה למקוטעין".

תרגיל 9. תהי  $\Gamma$  מסילה בעלת אורך  $l$  פונקציה חסומה על ידי ממשי חיובי  $M$ . הוכיחו שמתקיים

$$\int_{\Gamma} f dl \leq ML(\Gamma)$$

פתרון: נגדיר פונקציה חדשה  $g(x) = M - f(x)$ . לכל  $x$  מתקיים  $g(x) > 0$ . כמו כן מתקיים  $\int_{\Gamma} g dl = ML(\Gamma) - \int_{\Gamma} f dl$ .  
לכל פרמטריזציה של  $\Gamma$ ,

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$$

לכל חלוקה  $P = t_0 : \dots : t_n$  של הקטע  $[a, b]$  ולכל בחירה של נקודות  $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$  מתקיים

$$\sum_{i=1}^n g(x_i) \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| > 0$$

מכיוון ש  $\int_{\Gamma} g dl$  הוא גבול של סכומים מהצורה הנ"ל מתקיים

$$\begin{aligned} ML(\Gamma) - \int_{\Gamma} f dl &= \int_{\Gamma} g dl > 0 \\ \Downarrow \\ ML(\Gamma) &> \int_{\Gamma} f dl \end{aligned}$$

תרגיל 10. חשבו את האינטגרלים הבאים.

$$1. \int_{\Gamma} (x+y) dl \quad \text{כאשר } \Gamma = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$$

$$2. \int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl \quad \text{כאשר } \Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4x\}$$

$$3. \int_{\Gamma} xyz dl \quad \text{כאשר } \Gamma = \{(x, y, z) : x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2}t^2, 0 \leq t \leq 1\}$$

פתרון:

1. נשים לב שהפונקציה  $x+y$  היא פונקציה אי זוגית והתחום  $|x| + |y| = 1$  סימטרי ביחס לצירים. פונקציה אי זוגית על תחום סימטרי מתאפסת. דרך יותר איתית. התחום  $\Gamma$  מהווה ריבוע שקודקודיו הם  $(0, \pm 1)$  ו  $(\pm 1, 0)$ . נחלק את העקומה ל 4 קטעים:  $L_1$  המחבר את  $(1, 0)$  ו  $(0, 1)$ ,  $L_2$  המחבר את  $(0, 1)$  ו  $(-1, 0)$ ,  $L_3$  המחבר את  $(-1, 0)$  ו  $(0, -1)$ ,  $L_4$  המחבר את  $(0, -1)$  ו  $(1, 0)$ . האינטגרל שלנו שווה ל

$$\int_{\Gamma} x+y dl = \sum_{i=1}^4 \int_{L_i} x+y dl$$

נבחר פרמטריזציה עבור  $L_1$ . זה בעצם לבחור פרמטריזציה לקטע  $x+y=1$  שעובר ברביע הראשון. נקבל

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 1-t), \\ t &\in [0, 1] \end{aligned}$$

$x+y=1$  ואם נציב נקבל. באופן דומה נקבל פרמטריזציות עבור  $L_2, L_3, L_4$ .

$$\begin{aligned} L_2 : y-x &= 1 \Rightarrow \gamma_2(t) = (-t, 1-t) : t \in [0, 1], \\ L_3 : -x-y &= 1 \Rightarrow \gamma_3(t) = (-t, t-1) : t \in [0, 1] \\ L_4 : x-y &= 1 \Rightarrow \gamma_4(t) = (t, t-1) : t \in [0, 1] \end{aligned}$$

האינטגרלים הופכים ל

$$\begin{aligned}\int_{L_1} x + y \, d\mathbf{l} &= \int_0^1 (x(\gamma_1(t)) + y(\gamma_1(t))) |\gamma'_1(t)| \, dt = \int_0^1 1\sqrt{2} \, dt \\ \int_{L_2} x + y \, d\mathbf{l} &= \int_0^1 (x(\gamma_2(t)) + y(\gamma_2(t))) |\gamma'_2(t)| \, dt = \int_0^1 (1-2t)\sqrt{2} \, dt \\ \int_{L_3} x + y \, d\mathbf{l} &= \int_0^1 (x(\gamma_3(t)) + y(\gamma_3(t))) |\gamma'_3(t)| \, dt = \int_0^1 -1\sqrt{2} \, dt \\ \int_{L_4} x + y \, d\mathbf{l} &= \int_0^1 (x(\gamma_4(t)) + y(\gamma_4(t))) |\gamma'_4(t)| \, dt = \int_0^1 (2t-1)\sqrt{2} \, dt\end{aligned}$$

נחבר הכל ונקבל 0.

2. נבחר פרמטריזציה  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . נבדוק את התחום.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4x \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 4r \cos \theta \Rightarrow r = 4 \cos \theta \\ &\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \gamma(\theta) = (4 \cos^2 \theta, 4 \sin \theta \cos \theta) &\Rightarrow \gamma'(\theta) = (4(2 \cos \theta \sin \theta), \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 4(\sin 2\theta, \cos 2\theta) \\ &\Rightarrow \|\gamma'(\theta)\| = 4. \\ x(\gamma(\theta)) + y(\gamma(\theta)) = r &= 4 \cos \theta\end{aligned}$$

לאחר ההצבה האינטגרל הופך ל

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos \theta \cdot 4 \, d\theta = 16 \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 32$$

3. הפרמטריזציה כבר נתונה לנו. נחשב את  $\|\gamma'\|$ .

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \left(t, \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, \frac{1}{2}t^2\right) \Rightarrow \gamma'(t) = (1, \sqrt{2t}, t) \\ &\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 2t + t^2} = (1+t) \\ x(t)y(t)z(t) &= \frac{1}{3}t^4\sqrt{2t} \\ \int_{\Gamma} xyz \, d\mathbf{l} &= \int_0^1 \frac{1}{3}(1+t)t^4\sqrt{2t} \, dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{\frac{11}{2}} + t^{\frac{9}{2}} \, dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{2}{11} + \frac{2}{9}\right)\end{aligned}$$

## 2.3 משמעות "פיסיקלית".

נהוג לתת משמעות "פיסיקלית" לאינטגרל קווי מסוג ראשון כמסה של חוט, כאשר "צפיפות המסה" היא הפונקציה, ולחוט יש צורה של העקומה... סיפור נחמד.

תרגיל 11. חשבו:

1. מסה של קשת קו הבורג

$$\{(x, y, z) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

אם הצפיפות בכל נקודה נתונה שווה לריבוע המרחק.

פתרון: הפרמטריזציה כבר נתונה. נחשב את הנורמה של הוקטור המשיק.

$$\gamma(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t) \Rightarrow \gamma'(t) = (-4 \sin t, 4 \cos t, 3) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{25} = \rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \rho(t) = 4 + 9t^2$$

כאשר  $\rho$  הוא פונקציית הצפיפות. נציב ונקבל:

$$\int_{\gamma} \rho dl = \int_0^1 (4 + 9t^2) 5 dt = 5 (4t + 3t^3) \Big|_0^1 = 20$$

2. מסה של העקום

$$\Gamma = \{(x, y, z) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) : t \in [0, 1]\}$$

אם הצפיפות היא קבועה ושווה ל  $\sqrt{3}$ .

פתרון: שוב הפרמטריזציה כבר נתונה. נמצא את  $\|\gamma'(t)\|$ .

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \\ \Downarrow \\ \gamma'(t) &= (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \cos t + e^t \sin t, e^t) \\ \Downarrow \\ \|\gamma'(t)\| &= e^t \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t - 2 \cos t \sin t + \cos^2 t + \sin^2 t + 2 \cos t \sin t + 1)} \\ &= e^t \sqrt{3} \end{aligned}$$

הפונקצייה שעליה מנסים לעשות אינטגרל היא  $\sqrt{3}$ . נציב ונקבל

$$\int_{\gamma} \rho dl = \int_0^1 \sqrt{3} e^t \sqrt{3} dt = 3 \int_0^1 e^t dt = 3(e - 1)$$

3. המסה של הברבולה

$$\Gamma = \{(x, y) : y^2 = 4x, x \in [0, 1]\}$$

אם הצפיפות בנקודה  $(x, y)$  שווה ל  $|y|$ .

פתרון: נגדיר  $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{4}, t\right)$ , כאשר  $t \in [-2, 2]$ , מכאן נקבל,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left(\frac{t}{2}, 1\right) \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\frac{t^2}{4} + 1} \end{aligned}$$

פונקציית הצפיפות  $\rho$  נתונה על ידי

$$\rho(x, y) = y \Rightarrow \rho(t) = |t|$$

מכא

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \rho dl &= \int_{-2}^2 |t| \sqrt{\frac{t^2}{4} + 1} dt = 2 \int_0^2 t \sqrt{\frac{t^2}{4} + 1} dt \\ s &= \frac{t^2}{4} + 1 \Rightarrow ds = \frac{t}{2} dt \\ 2 \int_0^2 t \sqrt{\frac{t^2}{4} + 1} dt &= \int_0^1 4s \sqrt{s} ds = 4 \frac{2}{5} = 2.5 \end{aligned}$$

4. אורך העקום

$$\Gamma = \{(x, y, z) : x = \sqrt{t} \cos t, \sqrt{t} \sin t, z = t : 0 \leq t \leq 1\}$$

פתרון: נחליף פרמטריזציה לפרמטריזציה שקולה אבל קצת יותר נוחה:  $(x, y, z) = (t \cos t^2, t \sin t^2, t^2)$

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (t \cos t^2, t \sin t^2, t^2) \\ \Downarrow \\ \gamma'(t) &= (\cos t^2 - 2t^2 \sin t, \sin t^2 + 2t^2 \cos t, 2t) \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} = (2t^2 + 1)\end{aligned}$$

האינטגרל הופך ל  $\int_0^1 (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{3} + 1$

#### 4 תבניות מדויקות ושדות משרמים.

כדאי לעבור על תרגול 3 לפני שניגשים...

תרגיל 12. עבור כל אחת מהתבניות הבאות קבע אם היא מדויקת בתחום הנתון. במידה וכן, מצא את פונקציית הפוטנציאל של השדה המתאים.

1.  $\omega(x, y) = e^{x-y} (1 + x + y) dx + e^{x-y} (1 - x - y) dy$  בכל  $\mathbb{R}^2$ .

פתרון: התחום הוא קמור ולכן כוכבי. לכן למת פואנקרה מתקיימת. לכן מספיק לבדוק שהתבנית סגורה. הדבר נכון גם עבור התרגילים הבאים. מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} (e^{x-y} (1 + x + y)) &= -e^{x-y} (1 + x + y) + e^{x-y} = -e^{x-y} (x + y) \\ \frac{\partial}{\partial x} e^{x-y} (1 - x - y) &= e^{x-y} (1 - x - y) - e^{x-y} = -e^{x-y} (x + y)\end{aligned}$$

התבנית אכן מדויקת. נמצא את פונקציית הפוטנציאל

$$\begin{aligned}\int e^{x-y} (1 + x + y) dx &= e^{-y} \int (1 + y) e^x dx + e^{-y} \int x e^x dx = e^{-y} (1 + y) e^x + x e^x - e^x \\ &= (x + y) e^{x-y} + C(y)\end{aligned}$$

נגזור לפי  $y$  ונקבל.

$$-(x + y) e^{x-y} + e^{x-y} + C'(y) = (1 - x - y) e^{x-y}$$

ולכן  $C(y)$  קבוע.

2.  $\omega(x, y) = \frac{y^2}{1+x^2+y^2} dx + \frac{y}{1+x^2+y^2} dy$  בכל  $\mathbb{R}^2$ .

פתרון: הנגזרות החלקיות אינן שוות ולכן התבנית אינה סגורה ולכן אינה מדויקת.

3.  $\omega(x, y) = -\frac{y^2}{(x-y)^2} dx + \frac{x^2}{(x-y)^2} dy$  ב  $\{(x, y) : x > y\}$ .

פתרון: נבדוק האם התבנית מדויקת:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{y^2}{(x-y)^2} \right) = \frac{2x(x-y)^2 + 2(x-y)x^2}{(x-y)^4} = \frac{2x(x-y) + 2x^2}{(x-y)^3}$$

עם

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{(x-y)^2} \right) = -\frac{2y(x-y)^2 - 2y^2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2y^2 - 2y(x-y)}{(x-y)^3}$$

התבנית אינה מדויקת ולכן אינה סגורה.

$$4. \omega(x, y) = \frac{2y}{(x+y)} dx - \frac{2x}{(x+y)} dy \text{ ב } \{(x, y) : x + y > 0\}.$$

פתרון: נבדוק האם התבנית מדויקת. מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2y}{(x+y)} \right) &= \frac{2(x+y) - 2y}{(x+y)^2} = \frac{2x}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{2x}{(x+y)} \right) &= -\frac{2(x+y) - 2x}{(x+y)^2} = -\frac{2y}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

התבנית אינה סגורה ולכן אינה מדויקת.

תרגיל 13. האם התבנית

$$\omega(x, y) = \frac{(x-y)}{x^2+y^2} dx + \frac{(x+y)}{x^2+y^2} dy$$

מדויקת על  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  במידה וכן, מצא את פונקציית פוטנציאל של השדה המתאים.

פתרון: נבצע אינטגרל על מסוג שני על מעגל היחיד. נבחר פרמטריזציה

$$x = \cos t, y = \sin t; t \in [0, 2\pi]$$

נקבל: d

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + \cos t \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

זאת תבנית שהאינטגרל אינו מתאפס על עקומה סגורה ולכן אינה מדויקת.

## 5 אינטגרל קווי מסוג שני.

לפני שניגשים לפתרון של התרגיל יש לוודא שהמושגים "שקילות של עקומות" ו"אורינטציה" מובנים לכם. תרגיל 14 אופציונלי. מותר להשתמש במסכנות שלו.

תרגיל 14. הוכיחו את הטענות הבאות.

1. תהייה  $\alpha$  ו  $\beta$  עקומות פשוטות, שקולות וחלקות,  $\omega$  תבנית דיפרנציאלית לינארית כך ש  $\int_\alpha \omega$  קיים. הוכיחו ש

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

2. תהייה  $\alpha$  ו  $\beta$  עקומות פשוטות, שקולות וחלקות למקוטעין,  $\omega$  תבנית דיפרנציאלית לינארית כך ש  $\int_\alpha \omega$  קיים. הוכיחו ש

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

3. תהי  $\Gamma$  מסילה,  $\gamma_1$  ו  $\gamma_2$  פרמטריזציות פשוטות וחלקות למקוטעין של  $\Gamma$  כך ש  $(\Gamma, \gamma_1) = (\Gamma, \gamma_2)$ ,  $\omega$  תבנית דיפרנציאלית כך ש  $\int_{\gamma_1} \omega$  קיים. הוכיחו ש

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

במילים אחרות, עבור עקומה מכוונת חלקה למקוטעין, האוריינטציה קובעת את הערך שך האינטגרל.

4. תהי  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  עקומה חלקה ופשוטה,  $\omega$  תבנית דיפרנציאלית כך ש  $\int_{\alpha} \omega$  קיים. נגדיר  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  על ידי

$$\beta(t) = \alpha(1-t)$$

הוכיחו שמתקיים

$$\int_{\beta} \omega = - \int_{\alpha} \omega$$

5. הוכיחו שאם  $\int_{\gamma_1} \omega$  קיים, ו  $(\Gamma, \gamma_1) = -(\Gamma, \gamma_2)$  אזי

$$\int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma_2} \omega$$

תרגיל 15. חשבו את האינטגרלים הבאים.

1.  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$  כאשר  $\Gamma$  היא התמונה של המסילה

$$\gamma(t) = (\cos t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t + 1, \sqrt{3} \sin t - \cos t) : t \in [0, 2\pi]$$

2.  $\int_{\Gamma} \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$  כאשר  $\Gamma$  היא השפה של הריבוע  $ABCD$

$$A = (1, 0), B = (0, 1), C = (-1, 0), D = (0, -1)$$

נגד כיוון השעון.

פתרון: נחלק את המסילה ל 4 קטעים:  $AB, BC, CD, DA$ . נציב

$$\int_{ABCD} \omega = \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CD} \omega + \int_{DA} \omega$$

פרמטריזציה ל  $AB$  נתונה על ידי

3.  $\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$  כאשר  $\Gamma = \{(x, y) : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1\}$  נגד כיוון השעון.

פתרון: נשים לב שלתבנית יש קדומה  $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$  – זאת אפשר גם לבדוק על בדיקה שהתבנית מדויקת).  
שכן

$$\begin{aligned} \left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x &= \frac{y}{x^2+y^2} \\ \left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_y &= -\frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

העקום סגור ולכן האינטגרל מתאפס



$$4. \quad \Gamma = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 4, x = 0, z < 0\} \quad \text{כאשר} \quad \int_{\Gamma} y^3 z^2 dx + (x^2 + y^2 + z^2) dy + z dz$$

$$5. \quad \int_{\Gamma} x^2 dx + y^2 dy = 1 \quad \text{כאשר} \quad \Gamma = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} \quad \text{נגד כיוון השעון.}$$

תרגיל 16. הוכיחו שאם  $\|F(x)\| \leq M$  שגה חסומה,  $\Gamma$  פשוטה, אזי לכל פרמטריזציה  $\gamma$  של  $\Gamma$  מתקיים:

$$\left| \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma \right| \leq ML(\Gamma)$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma \right| &= \left| \int_I F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_I |F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt \\ &\leq \int_I \|F(\gamma'(t))\| \|\gamma'(t)\| dt \\ &\leq \int_I M \|\gamma'(t)\| dt \\ &= ML \end{aligned}$$

כאשר  $I$  הוא התחום של  $\gamma$ .

בהצלחה ☺.

## מקורות

[1] בן-ציון קון, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2, חלק ב'.

[2] *Edwards, Advanced Calculus of several variables*, פרק 5.