בוחן באינפי 1 -פתרון

1) הגדירו את המושגים הבאים (5 נק' לכל סעיף):

א. נאמר שלפונקציה הממשית f יש **אי רציפות סליקה** בנקודה c אם הגבול $\lim_{x\to c} f(x)$ קיים וסופי ובנוסף מתקיים אחד מהתנאים הבאים: 1) הפונקציה לא מוגדרת בנקודה c או ש- (2 $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$.

ב. נאמר שהפונקציה f **גזירה בנקודה** c אם לכל אינפי' שונה מאפס Δx, החלק הסטנדרטי $st\left(\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\right)$ קיים ולא תלוי ב Δx.

ג. **אינפיניטסימל שלילי** הוא היפר ממשי שקטן מאפס וגדול מכל ממשי שלילי.

ד. **הגבול של הפונקציה** f **בנקודה** $a\in\mathbb{R}$ **הוא** $L\in\mathbb{R}$ אם $st\left(f(a+\Delta x)\right)=L$ לכל אינפי' שונה מאפס Δx.

2) א. (16 נק') תהי $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. האם f רציפה? האם f גזירה?

פתרון- $\frac{1}{x}$ גזירה בכל נקודה $x\neq 0$ ופונקצית סינוס והפולינום x^2 גזירות ב $\mathbb{R}$ ולכן f גזירה ב $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ כמכפלה והרכבה של פונקציות גזירות (בתחומים הרלוונטיים). נבדוק גזירות של הפונקציה בנקודה אפס. לכל אינפי' שונה מאפס מתקיים $-1\le\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\le 1$ לפי כלל ההעברה ולכן סופי. מכאן המכפלה $\Delta x\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$ היא אינפי' כמכפלת סופי באינפי'. כלומר $st\left(\Delta x\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)=0$ ולכן

$$f'(0)=st\left(\frac{f\left(\Delta x\right)-f(0)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\left(\Delta x\right)^2\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\right)=st\left(\Delta x\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)=0$$

לכן הפונקציה גזירה גם באפס ובסה"כ גזירה בכל נקודה ממשית. מכיון שגזירות גוררת רציפות נקבל שהפונקציה גם רציפה.

ב. (16 נק') מצאו פונקציה ממשית f ומספר סופי a כך ש $st\left(f\left(a\right)\right)\neq f\left(st\left(a\right)\right)$.

פתרון: תהי $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ ויהי $0\neq a\approx 0$. אזי $st\left(f\left(a\right)\right)=st(1)=1\neq 2=f(0)=f(st(a))$.

דוגמה נוספת אפשרית: פונקציית הערך השלם כאשר $a=5-\varepsilon,\quad 0\approx\varepsilon>0$. באופן כללי כל פונקציה שאינה רציפה יכולה לספק את הדוגמה הדרושה (איך?).

3) א. (16 נק') הוכיחו או הפריכו : אם a ו- b שני מספרים היפר ממשיים שאינם אינפיניטסימליים המקיימים $a\approx b$, אזי $\frac{1}{a}\approx\frac{1}{b}$.

פתרון: הוכחה- $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$. עפי הנתון $a\approx b$ ולכן $b-a$ אינפי'. כמו כן נתון ש a ו- b אינם אינפי' ולכן ab סופי שאינו אינפי' או אינסופי (למה?). בכל מקרה נקבל שהמנה $\frac{b-a}{ab}$ אינפי' ומכאן $\frac{1}{a}\approx\frac{1}{b}$.

ב. (16 נק') מצאו את כל הנקודות בקטע $(2,8)$ בהן הפונקציה הבאה רציפה וסווגו את נקודות אי הרציפות:

$$f(x)=\begin{cases} 4+e^{x-5} & 2<x<5 \\ [x] & 5\le x<7 \\ 6 & x=7 \\ \frac{1}{x-7} & 7<x<8 \end{cases}.$$

פתרון: הפונקציה $4+e^{x-5}$ רציפה ב $\mathbb{R}$, הפונקציה $\frac{1}{x-7}$ רציפה ב $\mathbb{R}\setminus\{7\}$ והפונקציה $[x]$ רציפה ב $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. מכאן נובע שהפונקציה $f(x)$ רציפה בכל הנקודות בקטע $(2,8)$ אולי פרט לנקודות הפיצול $5,7$ ולנקודה 6 שבה פונקציית הערך השלם $[x]$ אינה רציפה. נבדוק רציפות בחמש:

$$\lim_{x\to5^-} f(x)=\lim_{x\to5^-} 4+e^{x-5}=4+e^0=5$$
$$\lim_{x\to5^+} f(x)=\lim_{x\to5^+}[x]=5=f(5)$$

ולכן הפונקציה רציפה גם בנקודה $x=5$ כי הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים לערך הפונקציה בנקודה.

$$\lim_{x\to6^-} f(x)=\lim_{x\to6^-}[x]=5$$
$$\lim_{x\to6^+} f(x)=\lim_{x\to6^+}[x]=6$$

הגבולות החד צדדיים קיימים סופיים ושונים ולכן $x=6$ נקודת אי רציפות ממין ראשון ("קפיצה").

$\lim_{x\to7^+} f(x)=\lim_{x\to7^+}\frac{1}{x-7}=\infty$ כי אם $7\approx x>7$ אז $x-7$ אינפי' חיובי ו- $\frac{1}{x-7}$ אינסופי חיובי. מספיק כבר בשלב זה לקבוע ש אי הרציפות בנק' 7 היא ממין שני כי אחד הגבולות החד צדדיים אינו סופי. אגב, אפשר גם לקבוע זאת על סמך העובדה ש $\lim_{x\to7^-} f(x)=\lim_{x\to7^-}\frac{1}{x-7}=-\infty$.

לסיכום: $f(x)$ רציפה ב $(2,8)\setminus\{6,7\}$. אי הרציפות ב- 6 היא ממין ראשון. אי הרציפות ב- 7 ממין שני.

4) א. (16 נק') מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הסתומה הנתונה על ידי המשוואה $y=\sin\left(xy\right)$ בנקודה $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$.

פתרון:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\sin\left(xy\right)\right)}{dx}=\cos(xy)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)\Rightarrow\frac{dy}{dx}\left(1-x\cos(xy)\right)=y\cos(xy)$$

$$\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)}=\left.\frac{y\cos(xy)}{1-x\cos(xy)}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}c\,\mathrm{os}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-\frac{\pi}{3}c\,\mathrm{os}\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{3}-2\pi}$$

ב. (10 נק') חשבו את $\frac{dy}{dx}$ כאשר $y=\left(\ln x\right)^{\cos x}$.

פתרון:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\left(\ln x\right)^{\cos x}\right)}{dx}=\frac{d\left(e^{\ln\left[\left(\ln x\right)^{\cos x}\right]}\right)}{dx}=\frac{d\left(e^{\cos(x)\ln(\ln(x))}\right)}{dx}=$$

$$e^{\cos(x)\ln(\ln(x))}\cdot\left(\cos(x)\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}-\sin(x)\ln(\ln(x))\right)=$$

$$e^{\cos(x)\ln(\ln(x))}\cdot\left(\frac{\cos(x)}{x\ln(x)}-\sin(x)\ln(\ln(x))\right)=\left(\ln x\right)^{\cos x}\left(\frac{\cos(x)}{x\ln(x)}-\sin(x)\ln(\ln(x))\right)$$