

תרגיל 1 בפונקציות מרוכבות

1. כתבו בצורה קרטזית את המספר

$$\frac{i-3}{2i+1}$$

פתרון: נשתמש בכפל בצמוד

$$\frac{i-3}{2i+1} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-3+2+6i+i}{1+4} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

וזהו

2. נתון

$$z = \left((1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i \right) (1 + \sqrt{3}i)$$

פתרון: נשים לב ש

$$\left((1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i \right) (1 + \sqrt{3}i) = 4 + 4i = \sqrt{32} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

(א) כתבו בצורה פולארית (קוטבית) את המספרים הבאים:

$$\frac{1}{\sqrt{32} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{32}} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \quad \text{פתרון: } \frac{1}{z}$$

$$(\sqrt{32} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4})^{17} = \sqrt{32}^{17} \operatorname{cis} \frac{17\pi}{4} = \sqrt{32}^{17} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \quad \text{פתרון: } z^{17}$$

$$\overline{\sqrt{32} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}} = \sqrt{32} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \quad \text{פתרון: } \bar{z}$$

(ב) מצאו את $\operatorname{Re} z^{2n}$.

פתרון:

$$\left(\sqrt{32} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right)^{2n} = 32^n \operatorname{cis} \frac{n\pi}{2}$$

החלק הממשי של הנ"ל הוא

$$32^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

אפשר לדייק יותר ולכתוב:

$$\operatorname{Re} z^{2n} = \begin{cases} 0 & n = 2k + 1 \\ 32^n & n = 4k \\ -32^n & n = 4k + 2 \end{cases}$$

3. פתרו את המשוואות הבאות:

$$z^6 - (1 - i)^3 = 0 \quad (\text{א})$$

פתרון: נשים לב ש

$$1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

ולכן המשוואה היא בעצם

$$z^6 = (\sqrt{2} \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{4}))^3 = \sqrt{8} \operatorname{cis}(-\frac{3\pi}{4})$$

לפי הנוסחה לחישוב שורשים נקבל ש

$$z = \sqrt[12]{8} \operatorname{cis}\left(\frac{-3\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}\right)$$

כאשר $k = 0, \dots, 5$.

$$|z| - z = i \quad (\text{ב})$$

פתרון: נציב $z = x + iy$ ונקבל ש

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = i$$

אם נשווה חלק מדומה נקבל ש

$$y = -1$$

ואם נשווה חלק ממשי נקבל ש

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 0$$

אבל בגלל ש $y = -1$ נקבל ש

$$\sqrt{x^2 + 1} = x$$

וזה הרי לא ייתכן כי

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$

ולכן אין פתרון למשוואה

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 2 \quad (\text{ג})$$

פתרון: נציב

$$\frac{z-1}{z+1} = w$$

ואז נפתור ראשית

$$w^5 = 2 = 2 \operatorname{cis} 0$$

ונגלה שהפתרון הוא

$$w = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi k}{5}$$

כאשר $k = 0, \dots, 4$. עכשיו לפי הגדרתנו

$$\frac{z-1}{z+1} = w$$

כלומר

$$z-1 = wz+w$$

$$z-wz = w+1$$

$$z = \frac{w+1}{1-w} = \frac{1 + \sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi k}{5}}{1 - \sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi k}{5}}$$

כאשר $k = 0, \dots, 4$

$$(z+i)^3 + 2(z+i)^{-3} + 2 = 0 \quad (\text{ד})$$

פתרון: נציב $w = (z+i)^3$ ונקבל

$$w + \frac{2}{w} + 2 = 0$$

כלומר

$$w^2 + 2w + 2 = 0$$

נפתור ונקבל

$$w = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

כלומר פתרון אחד הוא

$$w = -1 + i$$

במצב זה

$$(z+i)^3 = -1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis}(\frac{3\pi}{4})$$

ולכן

$$z+i = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis}(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3})$$

כאשר $k = 0, 1, 2$ כלומר

$$z = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis}(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}) - i$$

אפשרות שניה היא ש

$$w = -1 - i$$

ואז באופן די דומה מקבלים

$$z = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right) - i$$

4. מצאו נוסחא עבור הסכום

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$$

רמז: השתמשו בנוסחא לסכום סדרה הנדסית/גיאומטרית.

פתרון: נשים לב לכך ש

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta &= \operatorname{Im}(\operatorname{cis} \theta + \operatorname{cis} 2\theta + \dots + \operatorname{cis} n\theta) \\ &= \operatorname{Im}(\operatorname{cis} \theta + \operatorname{cis}^2 \theta + \dots + \operatorname{cis}^n \theta) \end{aligned}$$

לפי הנוסחא לסכום סדרה הנדסית זה שווה ל

$$\operatorname{Im} \frac{\operatorname{cis}^{n+1} \theta - \operatorname{cis} \theta}{\operatorname{cis} \theta - 1}$$

המספר שצריך לקחת לו חלק מדומה הוא:

$$\frac{\operatorname{cis}^{n+1} \theta - \operatorname{cis} \theta}{\operatorname{cis} \theta - 1} = \frac{\operatorname{cis}(n+1)\theta - \operatorname{cis} \theta}{\operatorname{cis} \theta - 1}$$

כדי למצוא את החלק המדומה נכפיל בצמוד

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cis}(n+1)\theta - \operatorname{cis} \theta}{\operatorname{cis} \theta - 1} \cdot \frac{\operatorname{cis}(-\theta) - 1}{\operatorname{cis}(-\theta) - 1} &= \frac{\operatorname{cis}(n\theta) - \operatorname{cis}(n+1)\theta - 1 + \operatorname{cis} \theta}{2 - \operatorname{cis} \theta - \operatorname{cis}(-\theta)} \\ &= \frac{\operatorname{cis}(n\theta) - \operatorname{cis}(n+1)\theta - 1 + \operatorname{cis} \theta}{2 - 2 \cos \theta} \end{aligned}$$

החלק המדומה של המספר הזה הוא:

$$\frac{\sin n\theta - \sin(n+1)\theta + \sin \theta - 1}{2 - 2 \cos \theta}$$

5. יהי $z \neq 0$, הוכיחו כי $z + \frac{1}{z}$ ממשי אם ורק אם z ממשי או $|z| = 1$
הערה: אולי יעזור לכם לשים לב לכך ש

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

פתרון: אם z ממשי, ברור ש $z + \frac{1}{z}$ ממשי. אם $|z| = 1$ אז

$$z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z + \bar{z}$$

שזה מספר ממשי.

מצד שני, נניח ש $z + \frac{1}{z}$ ממשי. נכתוב $z = x + iy$ אז

$$z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

בגלל שזה מספר ממשי, אז בהכרח יתקיים

$$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

אז אפשרות אחת היא ש $y = 0$ ואז באמת z ממשי. אפשרות אחרת ש $y \neq 0$ ואז אפשר לחלק בו ולקבל

$$1 - \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

מכאן מקבלים

$$x^2 + y^2 = 1$$

וזה אומר ש

$$|z| = 1$$

כנדרש.