תרגיל בית 4

1. תנו דוגמא לפונקציה f שאינה מדידה לבג אבל $|f|$ כן מדידה לבג.

פתרון: ניקח את $f=1_E-1_{E^c}$ כאשר E הינה הקבוצה הלא מדידה לבג שראינו מתחילת הקורס. ברור כי f איננה מדידה שכן $f^{-1}(1)=E$ וזו קבוצה לא מדידה לבג. כעת נשים לב כי $|f|=1$ זו כמובן פונקצית אינדיקטור שניתן לרשום $f=1_{\mathbb{R}}$ וזו כמובן קבוצה מדידה.

2. תהי $\{A_i\}$ סדרה של קבוצות זרות במרחב מדיד (X,S) .

i. יהיו $\{g_i\}_{i\ge1}$ סדרה של פונקציות על X המדידות S . הראו כי $\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}g_i$ מתכנסת ומדידה S .

ii. נניח כי $\bigcup_n A_n=X$. תהי $\mathscr{G}=\sigma(\{A_i:i\ge1\})$ ופונקציה $h:X\to\mathbb{R}$. הראו כי h מדידה אמ"מ h קבועה על כל A_i .

פתרון:

i. נסמן ב $G_M(x)=\sum_{i=1}^{M}1_{A_i}(x)g_i(x)$, זוהי סדרה של פונקציות מדידות. נסמן גם $G=\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}g_i$, קל לראות כי G_M מתכנסת ל G . מכאן ש G מדידה כגבול של פונקציות מדידות.

ii. $\Rightarrow$: אם h קבועה על כל A_i ב c_i , הערך של h על A_i אזי ברור כי $h=\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}(x)c_i$ הינה מדידה עפ"י הסעיף הראשון.

$\Leftarrow$: לא קשה להראות(בידקו תכונות) כי מכיוון ש A_i זרות ואיחודן הוא כל X אזי משפחת הקבוצות $\mathrm{C}=\{E\mid E=\bigcup_{i\in J}A_i,\ J\subseteq\mathbb{N}\}$ הינה סיגמא אלגברה המכילה את A_i ולכן $\mathscr{G}\subseteq C$. אם h איננה קבועה על איזשהו A_i אזי היא מקבלת לפחות 2 ערכים שונים על A_i , נניח שאחד מהם הוא y, אזי $D=h^{-1}(y)\cap A_i\subset A_i$ (מוכל ממש). מכיוון ש D מוכלת ממש ב A_i נובע כי $D\notin C$ ומכאן ש $h^{-1}(y)$ איננה מדידה $\mathscr{G}$.

3. יהי מרחב מדיד (X,S) ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות f_1, f_2 ו f_3 ($f_i:X\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,3)$). התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1(x)t^2+f_2(x)t+f_3(x)=0$$

זוהי משוואה ריבועית ב t לכל $x\in X$.

הראו כי $A\equiv\{x\in X : the\ equation\ has\ two\ distinct\ roots\}$ הינה מדידה $\mathcal{S}$.

פתרון: נשים לב כי $A=\{x\in X : {f_2}^2-4f_1f_3>0\}$. ראינו כבר כי פונקציות מדידות סגורות תחת כפל וחיבור ולכן ${f_2}^2-4f_1f$ הינה פונקציה מדידה $\mathcal{S}$ ומכאן ש ${f_2}^2-4f_1f>0$ הינה קבוצה מדידה $\mathcal{S}$.

4. יהי מרחב מדיד $(X,\mathcal{S})$ ויהיו f,g פונקציות מדידות $\mathcal{S}$ המקבלות ערכים ב $\mathbb{R}$. הראו כי הפונקציה $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}1_{(g(x)\neq 0)}$ הינה מדידה $\mathcal{S}$.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha<0$, אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$\begin{aligned}
h^{-1}\left((-\infty,\alpha)\right)&=\{x\in X \mid \frac{f(x)}{g(x)}<\alpha\}\\
&=\{x\in X \mid f(x)<g(x)\alpha\}\cap\{\mathrm{g}(x)>0\}\bigcup\{x\in X \mid f(x)>g(x)\alpha\}\cap\{\mathrm{g}(x)<0\}\\
&=\{x\in X \mid f(x)-g(x)\alpha<0\}\cap\{\mathrm{g}(x)>0\}\bigcup\{x\in X \mid f(x)-g(x)\alpha>0\}\cap\{\mathrm{g}(x)<0\}
\end{aligned}$$

מכיוון שהפונקציה $f-\alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.

5. הוכיחו:

א. לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה וחסומה הינה גבול של סדרת פונק' פשוטות המתכנסות במ"ש ל f .

ב. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ מדידה אזי קיימת סדרה של פונקציות מדידות עולות $\varphi_n\le\varphi_{n+1}$ כך ש $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=f$ כאשר ההתכנסות היא נקודתית.

הוכחה:

א. נניח כי הטווח של f הוא $[0,\infty)$, אחרת, נרשום $f=f^+-f^-$ וזה שקול.

כעת, נניח כיN הינו השלם הראשון כך ש $N>\sup f$. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{N2^n}\frac{k-1}{2^n}I_{E_{n,k}}(x)$$

כאשר $E_{n,k}=f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)\right)$. מכאן ש φ_n מדידות עם הצגה קנונית.

טענה: $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$

הוכחה:

$$\varphi_n(x)=\frac{k-1}{2^n}\Leftrightarrow f(x)\in\left[\frac{2(k-1)}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\Leftrightarrow f(x)\in\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\ or\ \ f(x)\in\left[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \varphi_{n+1}(x)=\frac{k-1}{2^n}\quad or\quad \varphi_{n+1}(x)=\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}$$

ולכל $x\in\mathbb{R}$ $0\le f(x)-\varphi_n(x)<\frac{1}{2^n}$: ניקח $x\in\mathbb{R}$, אזי $x\in E_{n,k}$ לאיזשהו n עכשיו נראה כי לכל $1\le k\le N2^n$, כלומר, $f(x)\in\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)\Rightarrow 0\le f-\varphi_n\le\frac{k}{2^n}-\frac{k-1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$

ומכאן שההתכנסות היא במידה שווה.

ב. אם ל f טווח של $[0,\infty]$ נגדיר

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}I_{E_{n,k}}(x)+nI_{F_n}$$

כאשר $F_n=\{f\ge n\}$. גם כאן, ניתן לראות עפ"י מה שהוכחנו, ש φ_n מדידות ו

אזי $\forall n\in\mathbb{N}$ $x\in F_n$, ו x $\varphi_n\le\varphi_{n+1}$ וגם $\forall n\in\mathbb{N}$ $\varphi_n\le f$. אם $f(x)=\infty$ לאיזשהו

יחיד $1\le k\le n2^n$ k $\varphi_n(x)=n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\infty$. אם $f(x)<\infty$, יהי $n>f(x)$, אזי קיים

כך ש $x\in E_{n,k}$. מכאן נובע כי $\varphi_n(x)=\frac{k-1}{2^n}$ כאשר $\frac{k-1}{2^n}\le f<\frac{k}{2^n}$ ולכן

$0\le f(x)-\varphi_n(x)<\frac{1}{2^n}$ ומכאן ש $\lim\varphi_n(x)=f(x)$.