<u>קואורדינטות, מטריצת מעבר, מטריצה המייצגת העתקה</u>

נסביר את כל המושגים תוך כדי שימוש בדוגמא קבועה:

$V=\mathbb{R}^2$ $B=\{(1,1),(1,-1)\}, S=\{(1,0),(0,1)\}$ בסיסים ל V.

הגדרה: יהא V מ"ו מעל שדה F, $B=\{v_1,...,v_n\}\subseteq V$ בסיס ויהי $v\in V$ וקטור. ההצגה היחידה של v לפי הבסיס B היא $v=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$. **וקטור הקואורדינטות** של v, מסומן $[v]_B$ מוגדר להיות $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. ברור ש $[v]_B\in F^n$.

חשוב לזכור $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ **אם"ם** $v=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$

הערה: בכל מרחב וקטורי יש **בסיס סטנדרטי**, בסיס שקל מאד לחשב את הקואורדינטות לפיו. עבור המטריצות $F^{n\times m}$ הבסיס הסטנדרטי הוא קבוצת המטריצות הבסיסיות (למשל $F^{2\times 2}\supseteq\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$). עבור הוקטורים F^n כמקרה פרטי של מטריצות הבסיס הסטנדרטי הוא $\{e_i\}$ (למשל S מהדוגמא). עבור הפולינומים $F_n[x]$ הבסיס הסטנדרטי הוא $\{x^i\}$ (למשל $F_2[x]\supseteq\{1,x,x^2\}$)

<u>משפט</u>: הפונקציה $[\ ]_B:V\to F^n$ הינה העתקה ליניארית חח"ע ועל.

מסקנה: $v=0\Leftrightarrow [v]_B=0$

בדוגמא: יהי וקטור $(a,b)\in V=\mathbb{R}^2$. $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$ ולכן לפי ההגדרה $[(a,b)]_S=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. $(a,b)=\frac{a+b}{2}(1,1)+\frac{a-b}{2}(1,-1)$ ולכן לפי ההגדרה $[(a,b)]_B=\begin{pmatrix}\frac{a+b}{2}\\ \frac{a-b}{2}\end{pmatrix}$

הגדרה: יהא V מ"ו מעל שדה F, $B=\{v_1,...,v_n\}, C=\{w_1,...,w_n\}\subseteq V$ בסיסים ל V. מטריצה P המקיימת $P[v]_B=[v]_c$ לכל וקטור $v\in V$ **נקראת מטריצת מעבר** מ B ל C ומסומנת $[I]_C^B$ או M_C^B.

<u>משפט</u>: בתנאי ההגדרה, מטריצת המעבר $[I]_C^B$ היא המטריצה שעמודותיה הם וקטורי הקואורדינטות של וקטורי הבסיס B לפי הבסיס C - $[v_i]_C$. כלומר $[I]_C^B = \left([v_1]_C \quad \cdots \quad [v_n]_C\right)$.

בדוגמא: מטריצת המעבר מ B ל S הינה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left([(1,-1)]_S \quad [(1,1)]_S\right) = [I]_S^B$. מטריצת המעבר מ S ל B הינה

$$[I]_B^S = \left([(1,0)]_B \quad [(0,1)]_B\right) = \begin{pmatrix} \frac{1+0}{2} & \frac{0+1}{2} \\ \frac{1-0}{2} & \frac{0-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<u>משפט</u>: בתנאי ההגדרה של מטריצת המעבר, תמיד מקיים $[I]_B^S = \left([I]_S^B\right)^{-1}$

בדוגמא:

$$[I]_S^B \cdot [I]_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>משפט</u>: יהא V מ"ו ויהיו B,C,D בסיסים ל V. אזי $[I]_C^B \cdot [I]_B^D = [I]_C^D$

מסקנה: הרי קל מאד לחשב קואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי. לכן נבנה **<u>אלגוריתם פשוט לחישוב מטריצת מעבר</u>** בין שני בסיסים לא סטנדרטיים B,C כלשהם. נסמן את הבסיס הסטנדרטי של המרחב ב S.

1. נחשב $[I]_S^B$ (קל מאד כמו שראינו – פשוט לרשום את הוקטורים בעמודות)
2. נחשב $[I]_S^C$ (קל מאד)
3. נחשב את ההופכית $\left([I]_S^C\right)^{-1}$ (הפיכת מטריצה)
4. נחשב $[I]_C^B = [I]_C^S [I]_S^B = \left([I]_S^C\right)^{-1} [I]_S^B$ (כפל מטריצות שחשבנו כבר)

הגדרה: תהא $T:V \to W$ העתקה לינארית. יהיו $E \subseteq V, F \subseteq W$ בסיסים. אזי מטריצה P המקיימת $P[v]_E = [Tv]_F$ לכל וקטור $v \in V$ נקראת **מטריצה המייצגת את ההעתקה** לפי הבסיסים E,F. מטריצה זו מסומנת $[T]_F^E$.

<u>הערה</u>: תהא העתקת הזהות $I:V \to V$ ויהיו $B,C \subseteq V$ בסיסים. אזי מטריצת המעבר היא מקרה פרטי של מטריצה מייצגת ההעתקה כי $[I]_C^B [v]_B = [Iv]_C = [v]_C$ (שכן $Iv = v$ כי העתקה הזהות שולחת כל וקטור לעצמו). מכאן נובע הסימון $[I]_C^B$

משפט: תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. יהיו $E\subseteq V, F\subseteq W$ בסיסים. נסמן $E=\{v_1,...,v_n\}, F=\{w_1,...,w_m\}$. אזי $[T]_F^E=\left([Tv_1]_F \quad \cdots \quad [Tv_n]_F\right)\in F^{m\times n}$. במילים- המטריצה המייצגת את ההעתקה מ E ל F היא המטריצה שעמודותיה הם הקואורדינטות לפי F של התמונות שאיברי הבסיס E על ידי ההעתקה F.

בדוגמא: ניקח $W=\mathbb{R}_3[x]$ ונגדיר $T:V\to W$ על ידי $T(a,b)=a+bx+bx^2$. ניקח בסיס $F=\{1,1+x,1+x+x^2\}$ וניקח את $E=B$. נחשב את תמונות איברי הבסיס E תחת ההעתקה $Tv_1=T(1,1)=1+x+x^2$,$Tv_2=T(1,-1)=1-x-x^2$. נחשב את הקואורדינטות של התמונות לפי הבסיס F. $Tv_1=0\cdot 1+0\cdot(1+x)+1\cdot(1+x+x^2)$,$Tv_2=2\cdot 1+0\cdot(1+x)-1\cdot(1+x+x^2)$

ולכן $[Tv_2]_F=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, [Tv_1]_F=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ולכן $[T]_F^E=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

נבדוק: הרי $[(a,b)]_E=\begin{pmatrix}\frac{a+b}{2}\\\frac{a-b}{2}\end{pmatrix}$. נחשב $[T]_F^E[(a,b)]_E=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{a+b}{2}\\\frac{a-b}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\0\\b\end{pmatrix}$

נוודא שאכן $[T(a,b)]_F=\begin{pmatrix}a-b\\0\\b\end{pmatrix}$ כמו שציפינו:

$$(a-b)\cdot 1+0\cdot(1+x)+b(1+x+x^2)=a+bx+bx^2=T(a,b)$$

הצלחה – ראינו ש $[T]_F^E[(a,b)]_E=[T(a,b)]_F$

משפט: יהיו V,W מרחבים וקטוריים עם $E\subseteq V, F_1,F_2\subseteq W$ בסיסים. אזי $[T]_{F_1}^E=[I]_{F_1}^{F_2}[T]_{F_2}^E$

מסקנה: על מנת לחשב מטריצה של ההעתקה מבסיס $E=\{v_1,...,v_n\}$ לבסיס כלשהו F ניתן להשתמש בבסיס הסטנדרטי של W - נסמן אותו ב S. אלגוריתם לחישוב $[T]_F^E$:

1. נחשב את $[T]_S^E=\left([Tv_1]_S \quad \cdots \quad [Tv_n]_S\right)$ (מחשבים את התמונות של איברי הבסיס E ושמים אותם בעמודות)
2. נחשב את $[I]_S^F$ (לשים בעמודות את איברי הבסיס F)
3. נחשב את $[I]_F^S=\left([I]_S^F\right)^{-1}$ (להפוך מטריצה)
4. נחשב את $[T]_F^E=[I]_F^S[T]_S^E$ (כפל מטריצות)