מתמטיקה לכימאים-מבחני השוואה טורים

משפטים כללים

פעולות על טורים

- אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ מתכנס.
- אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ מתכנס.

תנאי הכרחי להתכנסות

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

טורים ידועים

- $\sum_{n=1}^{\infty} cq^n$ מתכנס אם ורק אם $|q| < 1$ (טור הנדסי)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha > 1$

טורים חיובים

מבחן ההשוואה הראשון

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שני טורים. אם מתקיים החל ממקום מסוים$0 \leq a_n \leq b_n$, אז:

- אם$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$מתבדר, גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן ההשוואה השני

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שני טורים חיוביים, שעבורם הגבול $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים. אז:

1. אם$0 < L < \infty$, הטורים מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
2. במידה ו-$L = 0$ אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$מתכנס ואם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר (אבל ההפך אינו בהכרח נכון).
3. במידה ו-$L = \infty$ אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר אז$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר ואם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$מתכנס אז$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס (אבל ההפך אינו בהכרח נכון).

מבחן קושי

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי אינסופי. נסמן $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1. אם $q < 1$ הטור מתכנס.
2. אם $q > 1$ הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ המבחן אינו מספק מידע על התכנסות או התבדרות הטור.

מבחן דאלמבר

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי אינסופי. נסמן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

1. אם $q < 1$ הטור מתכנס.
2. אם$q > 1$ הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ המבחן אינו מספק מידע על התכנסות או התבדרות הטור.

מבחן האינטגרל

יהי N מספר טבעי ו- f פונקציה חיובית מונוטונית יורדת רציפה בקטע $[N, \infty)$, אזי סכום הסדרה החיובית $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל$\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ הוא סופי. בפרט, אם האינטגרל מתבדר אזי גם הטור מתבדר.

טורים כללים

התכנסות בתנאי/התכנסות בהחלט

- הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס כטור חיובי.
- הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אם טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר כטור חיובי ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס כטור כללי.

קריטריון קושי

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$מתכנס אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$קיים N כך שלכל $m > n > N$ מתקיים $|\sum_{i=n}^{m} a_i| < \varepsilon$.

מבחן לייבניץ

תהי a_n סדרה חיובית שיורדת מונוטונית לאפס. אזי הטור המתחלף שנוצר על ידה$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ מתכנס.

מבחן דיריכלה

תהי a_n סדרה מונוטונית ושואפת לאפס ותהיb_n סדרה שעבורה קיים מספר חיובי M כך שלכל N טבעי מתקיים $|\sum_{n=1}^{N} b_n| < M$ (הטור שלb_n חסום), בתנאים אלה הטור$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ מתכנס.

מבחן אבל

תהי a_n סדרה מונוטונית חסומה ויהי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס, אזי בתנאים אלה הטור$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ מתכנס.