תרגיל 6 אליזה למורים

21 בדצמבר 2016

שאלה 1

האם הטור הבא מתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n-1}}$?

הדרכה:

נתבונן בסדרת הסכומים הלקיים של הטור:

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{3^n}{2^{n-1}}=\sum 2\cdot\frac{3^n}{2^n}=\sum 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n=2\cdot\left(\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=2\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}\right)$$

למה שווה גבול של הסדרה הזו? ומכיוון שסכום של טור אינסופי הוא גבול של סדרת הסכומים החלקיים שלו אזי מה אפשר להגיד על הטור שלנו?

שאלה 2

בדוק האם הטורים הבאים מתכנסים:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3+5n+2}$

2) $\sum\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\left(\sqrt[3]{n}+2\sqrt[5]{n+2}-1\right)}$

שאלה 3

מצא את גבולות הבאים:

1) $lim\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

משפט שימושי: נניח כי $lima_n=1$, אזי $lim\left(a_n\right)^{b_n}=e^{lim(a_n-1)b_n}$.

2) $lim\left(\frac{n+4}{n+7}\right)^{n+1}$

3) $lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^2+4}$

4) $lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

רמז: משפט סנדוויץ

5) $lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

6) $lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^3+n^2}}{\sqrt[3]{n^6+2}+\sqrt[3]{n^3+4}}$

תזכורת: $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^3\right)$

7) $lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3-1}-\sqrt[3]{n^3+1}}$

8) $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^2+2^n+3^n+\cdots+666^n}$

רמז: שאלה דומה מאוד ראינו בכיתה.

שאלה 4

ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א) הוכח או הפרך: $lim\left(b_n\right)=0$ אזי $lim\frac{b_{n+1}}{b_n}=0$.

ב) תהי a_n סדרה ממשית מתכנסת לגבול ממשי L ותהי b_n סדרה חסומה אזי $a_n\cdot b_n$ מתכנסת אם ורק אם $L=0$.