מבוא לטופולוגיה - תרגיל 1

תזכורת

יהיו A,B תתקבוצות בקבוצה X ו- $f:A\to B$ - פונקציה , אזי מתקיים:

$$A\subseteq B\Longrightarrow f(A)\subseteq f(B)$$

$$A\subseteq B\Longrightarrow f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(B)$$

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A^c)=\left(f^{-1}(A)\right)^c$$

שאלה 1

א' תוכיחו ש- $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

ב' תנו דוגמה נגדית כאשר $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

שאלה 2

תיהי: $f:A\to B$ פונקציה ו- $C\subseteq B$, ו- $D\subseteq A$.

אי תוכיחו ש-$f\left(f^{-1}(C)\right)=C$ ו- $f^{-1}\left(f(D)\right)\supseteq D$

ב' תנו דוגמה נגדית כאשר $f^{-1}\left(f(D)\right)\supset D$

שאלה 3

אומרים שפונקציה - f עם תחום A **<u>מצטמצמת משמאל,</u>** אם לכל שתי פונקציות g,h עם טווח A מתקיים:

$$f\circ g=f\circ h\Longrightarrow g=h$$

אומרים שפונקציה-f עם טווח A **<u>מצטמצמת מימין</u>**, אם לכל שתי פונקציות g,h עם תחום A מתקיים:

$$g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$$

אמרנו בכיתה שכל פונקצית **על** מצטמצמת מימין וכל פונקציה **חד-חד-ערכית (חח"ע)** מצטמצמת משמאל.

תוכיחו שתי הטענות ההפוכות:

א' כל פונקציה מצטמצמת מימין היא פונקצית על.

ב' כל פונקציה מצטמצמת משמאל היא פונקציה חח"ע.

שאלה 4

יהיה (M, d) מרחב מטרי תוכיחו ש-

א' לכל $x, y, z \in M$ מתקיים: $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$

ב' לכל $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ מתקיים:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

שאלה 5

תהי K קבוצה לא ריקה ויהיה X אוסף של כל <u>הסדרות</u> שאיבריהן שייכים ל- K .
נגדיר פונקציה $d: X \times X \to [0, \infty)$

כך שלכל $x, y \in X$: , $d(x,y) = \begin{cases} 0 & if\ x = y \\ \frac{1}{\min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}} & if\ x \neq y \end{cases}$.

תראו ש- d - מאטריקה על X.

שאלה 6

יהיה (M, d) מרחב מטרי. יהיה $x \in M$ ותהי $x_n \in M$ סדרה ב-M.

תוכיחו ש- $x_n \to x$ אם ורק אם $d(x_n, x) \to 0$.