פתרון תרגיל בית 10 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1.

א. נראה כיוון הפוך לטענה שראינו בכיתה: יהי M מודול מעל חוג מנה R/I. הוכיחו כי M הוא מודול מעל R לפי הפעולה $rm := (r+I)m$. בנוסף הוכיחו $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$.

ב. יהי M הוא מודול מעל חוג R, ויהי $I \lhd R$ אידאל. הראו ש-IM הוא תת-מודול של M מעל R, וכי M/IM יורש באופן טבעי מבנה של מודול מעל R/I.

פתרון.

א. נוודא את אקסיומות המודול:

$$(r+r')m = (r+r'+I)m = ((r+I)+(r'+I))m = (r+I)m + (r'+I)m = rm + r'm$$
$$r(m+m') = (r+I)(m+m') = (r+I)m + (r+I)m' = rm + rm'$$
$$(rr')m = (rr'+I)m = ((r+I)(r'+I))m = (r+I)((r'+I)m) = r(r'm)$$
$$1_R m = (1_R + I)m = 1_{R/I} m = m$$

בנוסף, אם $r \in I$ אז $rm = (r+I)m = (0+I)m = 0_M$, לכן $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$.

ב. קודם כל ניזכר בהגדרה של IM: $IM = \{\sum_{i=1}^n r_i m_i \mid r_i \in I, m_i \in M\}$. לכן ברור שזו תת-חבורה חיבורית של M. היא סגורה לכפל בסקלר כי $R(IM) = (RI)M = IM$.

כדי להגדיר מבנה של R/I-מודול על M/IM, צריך להגדיר את הכפל

$(r+I)(m+IM)$.

אין הרבה ברירות אלא להגדיר אותו

$(r+I)(m+IM) = rm + IM$.

צריך לוודא שזה מוגדר היטב. אכן, אם $r+I = r'+I$, אז $r-r' \in I$, ולכן

$$(r+I)(m+IM) = rm+IM = r'm+\underbrace{(r-r')m}_{\in IM}+IM = r'm+IM = (r'+I)(m+IM)$$

בנוסף, אם $m+IM = m'+IM$, אז $m-m' \in IM$, ולכן

$$(r+I)(m+IM) = rm+IM = rm'+r\underbrace{(m-m')}_{\in IM}+IM = rm'+IM = (r+I)(m'+IM).$$

בדיקת אקסיומות המודול היא ישירה.

שאלה 2. יהי R חוג חילופי, ויהי M מודול מעל R.

א. הוכיחו שאם M חופשי, אז $\mathrm{Ann}_R(M) = \{0_R\}$ ו-$\mathrm{Tor}(M) = \{0_M\}$.

ב. הוכיחו שאם כל אידאל $I \lhd R$ הוא חופשי כמודול מעל R, אז R הוא תחום ראשי.

פתרון.

א. אם $r \in \mathrm{Ann}_R(M)$, אז $rm_1 - rm_2 = 0$. זו תלות לינארית, ולפי הנתון M חופשי, ולכן $r = 0$. אם $m \in \mathrm{Tor}(M)$, אז ניתן להציג אותו כצירוף לינארי של קבוצה פורשת של M. אבל קיים $R \ni r \neq 0$ כך ש-$rm = 0$, ולכן כל המקדמים בצירוף הלינארי חייבים להתאפס, כי הם בלתי תלויים, ולכן $m = 0$.

ב. יהיו $a, b \in I$. אז $ba - ab = 0$, ולכן הם תלויים לינארית. לכן האידאל I נוצר על ידי איבר יחיד. נראה כי R תחום. לכל $a \neq 0$ מתקיים $I = Ra \neq 0$, ואם $ab = 0$, אז $Ib = 0$, אבל I חופשי, ולכן המאפס שלו הוא אפס לפי הסעיף הקודם, ולכן $b = 0$, כדרוש.

שאלה 3. יהי R חוג ויהיו אידאלים שמאליים $L, L' \leq_l R$. בכיתה ראינו מסקנה לפיה אם R חילופי, אז $R/L \cong R/L'$ איזומורפיים כמודולים מעל R אם ורק אם $L = L'$.
הפריכו את המסקנה אם R אינו חילופי. רמז: אפשר לבחור $R = M_2(\mathbb{Q})$, $L = Re_{11}$ ו-$L' = Re_{22}$.

פתרון. ניקח כמו שהרמז מציע, $R = M_2(\mathbb{Q})$, $L = Re_{11}$ ו-$L' = Re_{22}$. ברור ש-$L \neq L'$, ולכן נותר להראות ש-$R/L \cong R/L'$ כמודולים מעל R. מיהם מודולי המנה?

$$R/L \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}; \qquad R/L' \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$$

(כי $L = Re_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$ ובדומה L'). האיזומורפיזם ביניהם ברור (נחליף את העמודות) – ודאו שזהו אכן איזומורפיזם של מודולים.

שאלה 4. יהי M מודול נוצר סופית ומפותל מעל תחום שלמות R. הוכיחו כי M לא נאמן.

פתרון. תזכורת: M נקרא מפותל אם $\mathrm{Tor}(M) = M$, ונאמן אם $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$. נניח ש-$x_1, \dots, x_n$ יוצרים של M מעל R. מכך שהוא מפותל, לכל $1 \leq i \leq n$ קיים $r_i \neq 0$ כך ש-$r_i x_i = 0$. נתבונן באיבר $r = r_1 \cdots r_n$. הוא שונה מ-0 כי R תחום שלמות. מצד שני, $r x_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$, ולכן $rM = 0$, כלומר $r \in \mathrm{Ann}_R(M)$.

שאלה 5. יהי R תחום ראשי, ותהינה מטריצות $A \in M_n(R)$ ו-$B \in M_m(R)$. נתבונן במטריצת הבלוקים

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{n+m}(R)$$

הוכיחו $M_{A \oplus B} \cong M_A \oplus M_B$ כמודולים מעל R.

פתרון. לפי ההגדרה $M_{A \oplus B} = {R^{n+m}}/{(A \oplus B)R^{n+m}}$. אפשר לשים לב כי $(A \oplus B)R^{n+m} \cong AR^n \oplus BR^m$. נגדיר פונקציה $\varphi : R^{n+m} \to {R^n}/{AR^n} \oplus {R^m}/{BR^m} = M_A \oplus M_B$ לפי

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n+m}) = ((x_1, \dots, x_n) + AR^n, (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) + BR^m)$$

(כלומר מפרקים ל-n הקואורדינטות הראשונות ול-m הקואורדינטות האחרונות). זה הומומורפיזם של מודולים, הוא על, והגרעין שלו הוא בדיוק $(A \oplus B)R^{n+m}$.

שאלה 6. חשבו את הסדר של החבורה החיבורית

$$G = \left\langle a, b \;\middle|\; \begin{array}{rl} 88a + 20b & = 0 \\ -212a - 56b & = 0 \end{array} \right\rangle$$

פתרון. ניקח את מטריצת היחסים ונדרג לצורה אלכסונית קנונית. שימו לב שבהתחלה אין איבר שמחלק את כל המטריצה, אז קודם נייצר את ה-gcd של כל המספרים (שהוא 4), נעביר אותו לפינה השמאלית עליונה ונמשיך משם:

$$\begin{pmatrix} 88 & 20 \\ -212 & -56 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1} \begin{pmatrix} 88 & 20 \\ 52 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 52 & 4 \\ 88 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 4 & 52 \\ 20 & 88 \end{pmatrix} \to$$
$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1} \begin{pmatrix} 4 & 52 \\ 0 & -172 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - 13C_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -172 \end{pmatrix}$$

זו צורה אלכסונית קנונית. לכן $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/172\mathbb{Z}$, והסדר שלה הוא 688.

שאלה 7. מצאו את הגורמים האינווריאנטים מעל החוג $\mathbb{Z}$ של המודול $M_A = \mathbb{Z}^3 / A \cdot \mathbb{Z}^3$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

פתרון. נדרג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 9 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 6R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 9R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \to$$
$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -18 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \to$$
$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

לכן הגורמים האינווריאנטים הם $1, -6, 18$.

שאלה 8. מצאו את הצורה האלכסונית הקנונית של המטריצה הבאה מעל $\mathbb{Z}[i]$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1+3i & 1+3i & 0 \\ 5+3i & 3+3i & 2 \end{pmatrix}$$

פתרון. בלי לפרט מהן פעולות השורה,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1+3i & 1+3i & 0 \\ 5+3i & 3+3i & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1+3i & 1+3i \\ 2 & 3+3i & 5+3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1+3i & 1+3i \\ 0 & 1+3i & 1+3i \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3i & 1+3i \\ 0 & 1+3i & 1+3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 0 & 1+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ 1+3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & -4-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 4+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כדי להגיע לדירוג קנוני (ולא דירוג גאוס) בכל שלב נביא את האיבר הכי קטן לפינה ונאפס את השורה והעמודה המתאימות. בשלבים האחרונים נעזרנו בחישוב

$$\gcd(2, 1+3i) = 1+i = -i \cdot 2 + 1 \cdot (1+3i)$$

בהצלחה!