בוחן מבנים אלגבריים הנדסה תשעז

7/12/2016 ז' כסליו

מתרגל: אחיה בר־און.

- ענו על 3 מתוך 4 שאלות.
- **כתבו בדף הראשון של המחברת את הת.ז. שלכם בצורה ברורה.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד: ניקוד שווה של 34 נקודות לכל שאלה

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
4	
total	

בהצלחה!

1. קבעו עבור הקבוצות הבאות האם הם מהוות חבורה/מונואיד/אגודה ביחס לפעולה הנתונה בשאלה:

(א) [17 נקו'] הקבוצה $\mathbb{R}$ עם הפעולה

$$x \odot y = 2xy + x + y$$

פתרון: זוהו מנואיד:
מוגדרות ־ אכן $2xy + x + y \in \mathbb{R}$
אסוציאטויבות־ מתקיים

$$x \odot (y \odot z) = x \odot (2yz + y + z) = 2x\left(2yz + y + z\right) + x + 2yz + y + z = 4xyz + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z$$

$$(x \odot y) \odot z = (2xy + x + y) \odot z = 2\left(2xy + x + y\right)z + 2xy + x + y + z = 4xyz + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z$$

יחידה היא 0 , אכן לכל y מתקיים

$$0 \odot y = 2 \cdot 0 \cdot y + 0 + y = y$$

$$y \odot 0 = 2y \cdot 0 + y + 0 = y$$

אין הופכי לכל האיברים, למשל ל $-\frac{1}{2}$ אין הופכי כי לכל y מתקיים כי

$$-\frac{1}{2} \odot y = 2(-\frac{1}{2})y - \frac{1}{2} + y = -\frac{1}{2}$$

בפרט אין y כך ש $-\frac{1}{2} \odot y = 0$

(ב) [17 נקו'] הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ : \ 5 \le c\right\}$ עם הפעולה של כפל מטריצות
פתרון: זוהו חבורה למחצה:
מוגדרות ־

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & b'a + c'b \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$$

וכיוון ש $5 \le c, c'$ גם המכפלה בניהם
אסוציאטויבות־ מתקיים כי כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי
אין יחידה כי למשל

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5b \\ 0 & 5c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

.2

(א) [13 נקו'] תהא $\sigma \in S_n$. הוכיחו כי ל σ ול σ^{-1} יש אותו סימן. כלומר $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$
פתרון: ראינו בש.ב. כי $sgn(\sigma_1\sigma_2) = sgn(\sigma_1)sgn(\sigma_2)$ ולכן

$$sgn(\sigma)sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma\sigma^{-1}) = sgn(id) = 1$$

ולכן בהכפלה ב $sgn(\sigma^{-1})$ מימין נקבל כי

$$sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$$

(ב) [21 נקו'] תהא G חבורה ציקלית מסדר n (כלומר ב G יש n איברים). הוכיחו כי מספר היוצרים של G הוא $\phi(n)$ כאשר

$$\phi(n) = |\{k : (1 \le k \le n) \wedge (\gcd(k,n) = 1)\}|$$

כלומר $\phi(n)$ הוא מספר ה k ־ ים בין 1 ל n שזרים ל n.
פתרון: יהא $g \in G$ יוצר. אזי $o(g) = n$ ומתקיים כי $G = \left\{g^k : 1 \le k \le n\right\}$. ראינו בש.ב. כי לכל k מתקיים כי

$$o(g^k) = \frac{n}{\gcd(k,n)}$$

ולכן :
g^kיוצר של G אמ"מ $n = o(g^k) = \frac{n}{\gcd(k,n)}$ אמ"מ $\gcd(k,n) = 1$
ולכן מספר היוצרים שווה ל $\phi(n)$

3. תהא G חבורה חילופית. יהיו $a, b \in G$. נסמן $o(a) = n, o(b) = m$

(א) [13 נקו'] האם בהכרח מתקיים $o(ab) = mn$? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמא בה השיוויון לא מתקיים.

(ב) [21 נקו'] הוכיחו כי:
אם $\gcd(n,m) = 1$ אזי $o(ab) = m \cdot n$

4. תהא G חבורה. נגדיר עליה יחס בצורה הבאה: לכל $g_1, g_2 \in G$

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists x \in G : xg_1x^{-1} = g_2$$

ליחס זה קוראים יחס ההצמדה.

(א) [15 נקו'] הוכח כי ~ יחס שקילות על G.

(ב) [19 נקו'] עבור $G = S_n$ ויחס ההצמדה: הוכיחו כי מתקיים $[(1,2)]_\sim = \{(i,j) \mid 1 \le i \ne j \le n\}$ כאשר $[(1,2)]_\sim$ זה מחלקת השקילות של $(1,2)$ [מחלקת השקילות ביחס ל $\sim$]