שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית 3 - טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

יהי (X,d) מ"מ.

א. הוכיחו כי לכל $x\in X$, $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.

ב. הסיקו כי כל תת קבוצה סופית של X סגורה.

<u>שאלה 2</u>

א. הוכיחו ש- $\mathbb{Q}$ אינה סגורה ואינה פתוחה ב- $\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו שהקבוצה $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sin(x)+xy\le 5\}$ סגורה ב- $\mathbb{R}^2$.

ג. הוכיחו: כל מישור ב- $\mathbb{R}^3$ הוא סגור.

ד. יהי $M_n(\mathbb{R})$ המרחב המטרי של המטריצות הריבועיות $n\times n$ עם מקדמים ממשיים (זהו המרחב המטרי $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה במרחב זה.

<u>שאלה 3</u>

א. הוכיחו/הפריכו: מטריקות שקולות מגדירות את אותה משפחה של קבוצות סגורות.

ב. אילו מהמטריקות הבאות שקולות מעל $\mathbb{Z}$: d_Δ (המטריקה הדיסקרטית), d_7 (המטריקה ה-7 אדית), d_5 (המטריקה ה-5 אדית) והמטריקה הסטנדרטית d המוגדרת ע"י $d(x,y)=|x-y|$ (הוכיחו את תשובתכם!).

ג. נגדיר שתי מטריקות על $\mathbb{R}^2$. עבור $x=(x_1,y_1),\ y=(x_2,y_2)$

$$d_1(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},\quad d_2(x,y)=\begin{cases}|y_1-y_2| & x_1=x_2\\ |y_1|+|y_2|+|x_1-x_2| & x_1\neq x_2\end{cases}.$$

הוכיחו או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולות.

ד. תהי $S=\left\{\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} : a_n\in\mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\right\}$. נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות: $d\left(\left(a_n\right),\left(b_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n-b_n\right|$, $\rho\left(\left(a_n\right),\left(b_n\right)\right)=\sup\left\{\left|a_n-b_n\right| : n\in\mathbb{N}\right\}$. הוכיחו או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולת.

שאלה 4

א. יהיו d_1,d_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל X. יהיו ρ_1,ρ_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל Y. נניח ש- $f:\left(X,d_1\right)\to\left(Y,\rho_1\right)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f:\left(X,d_2\right)\to\left(Y,\rho_2\right)$ רציפה.

ב. יהיו d_1,d_2 מטריקות <u>כלשהן</u> מעל X. יהיו ρ_1,ρ_2 מטריקות <u>כלשהן</u> מעל Y. נניח ש- $f:\left(X,d_1\right)\to\left(Y,\rho_1\right)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f:\left(X,d_2\right)\to\left(Y,\rho_2\right)$ רציפה.

שאלה 5

תהי $f:\left(X,d\right)\to\left(Y,\rho\right)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים.

א. הוכיחו: f רציפה אמ"מ $f^{-1}\left(O\right)$ פתוחה ב- X לכל <u>כדור פתוח</u> $O\subseteq Y$.

ב. הראו שהטענה האנלוגית עבור כדורים סגורים אינה נכונה. כלומר, מצאו שני מרחבים מטריים ופונקציה בינהם $f:\left(X,d\right)\to\left(Y,\rho\right)$, כך ש- f אינה רציפה למרות שכן מתקיים התנאי הבא: $f^{-1}\left(B\right)$ סגורה ב- X לכל <u>כדור סגור</u> $B\subseteq Y$.

שאלה 6

נתבונן במרחב $C\left[0,1\right]$: מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ עם מטריקת המקסימום.

א. תהי $a \in [0,1]$. נגדיר פונקציה $F_a : C[0,1] \to \mathbb{R}$ על-ידי $F_a(f) = f(a)$. הוכיחו כי זו פונקציה רציפה.

ב. הוכיחו/הפריכו: הקבוצה $\left\{ f \in C[0,1] : f\left(\frac{1}{3}\right) < 19 \right\}$ היא קבוצה פתוחה ב-$C[0,1]$.

בהצלחה!