תרגול 7 – טופולוגיה

הגדרה

יהי  מ"ט ותהי . נאמר ש-**צפופה**ב- אם .

טענה (שהוכחתם בכיתה)

 צפופה אמ"מ לכל  פתוחה ולא ריקהמתקיים .

**תרגיל**

יהי . הוכיחו:

1. לכל  מתקיים:  פתוחה או  בעלת פנים ריק.
2. כל קבוצה אינסופית היא צפופה ב-.

פתרון

1. אם  סיימנו, אחרת נניח  ונוכיח ש- פתוחה. מתקיים  ולכן . מכיון ש- סגורה ואינה שווה לכל המרחב, אזי היא סופית ולכן  סופית ולכן  פתוחה.
2. תהי  קבוצה אינסופית. נרצה להראות ש-. לשם כך נבחן את הקבוצות הסגורות אשר מכילות את . ידוע שהקבוצות הסגורות הן הסופיות והמרחב כולו. לכן הסגורה היחידה שמכילה את  היא . לכן מתקיים .

מש"ל

הערה: תהיינה  שתי תת קבוצות של מ"ט כלשהו. אזי .

**תרגיל**

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות לכל מ"ט ולכל ת"ק :

1. ;
2. ;
3.  (כלומר, הסְגוֹר של הפְּנים שווה לפְּנים של הסְגוֹר).

פתרון

1. לכן עפ"י ההערה נקבל ש-, ובאופן דומה מראים ש-. לכן . נוכיח את ההכלה בכיוון השני:

ולכן . כעת  סגורה כאיחוד סופי של סגורות ומכילה את  לכן גם בהכרח  (מדוע?).

1.  נוכיח הכלה דו כיוונית.

: יהי , אזי קיימת  פתוחה ב- , וכן  פתוחה ב- כך ש- . לכן, . אבל,  היא קבוצה פתוחה ב-, וכן מתקיים  ולכן לפי ההגדרה של פְּנים, .

: יהי , אזי קיימת  פתוחה ב- כך ש- . מתקיים , ולכן (לפי ההגדרה) .

1. הפרכה- נסתכל ב על הקטע הפתוח (שהוא גם קבוצה פתוחה) . מתקיים .

מש"ל

הגדרה – קשירות

יהי  מרחב טופולוגי. נאמר ש-**לא קשיר** אם קיימות שתי קבוצות פתוחות, זרות ולא ריקות  כך ש- . אחרת, נאמר ש-**קשיר**.

הגדרות שקולות

1. כנ"ל לגבי שתי קבוצות סגורות.
2.  לא קשיר אם קיימת בו קבוצה סגוחה לא טריוויאלית.

הגדרה

יהי  מ"ט ותהי .**השפה**של היא .

הערה: השוויון  נובע מכך ש-. את הזהות הזאת ואת  תוכיחו בשיעורי הבית.

**תרגיל**

יהי  מ"ט ותהי . תהי פונקציה אופיינית המוגדרת על-ידי . נניח ש-. הוכיחו ש- רציפה ב-.

פתרון

: נניח ש  אזי . כלומר . מקרה ראשון : . מתקיים בהכרח ואז . נוכיח רציפות ב-. לכל סביבה של  נבחר  סביבה של  ומתקיים . מקרה שני: . נקבל ש-. כעת מתקיים בהכרח ולכן . לכל סביבה של , סביבה של ומתקיים .

הכיוון השני בש"ב.

מש"ל

תזכורת למשפט מהרצאה

מ"ט  קשיר אמ"מ מקיים את תכונת ערך הביניים.

**תרגיל**

יהי  מרחב מטרי כך ש- . הוכיחו שהמרחב לא קשיר.

פתרון

היזכרו שבהינתן  ניתן להגדיר פונקציה רציפה  על ידי: . נניח בשלילה ש- קשיר. קיימת  וכן מהנתון קיימת . מתקיים:  ונסמן . על פי משפט ערך הביניים לכל  קיים  כך ש- . אך זאת סתירה, שכן .

מש"ל

**משפט**

יהיו  מ"ט,  קשיר ו-  רציפה. אזי  מרחב קשיר.

**תרגיל**

תהי  ותהי  רציפה. הוכיחו ש-  הומיאומורפי ל-.

פתרון

נגדיר פונקציה  על-ידי . נגדיר פונקציית עזר:  ו- .  רציפה כי זאת פונקציית ההכלה ולכן רציפה, ו-  (טענה מאינפי' 3). כעת, מכיוון ש- מתקבלת מ- ע"י צמצום הטווח, גם היא רציפה. קל לראות שהפונקציה ההופכית היא:  המוגדרת ע"י . על מנת להוכיח שזאת פונקציה רציפה ניעזר בפונקציית ההטלה:  רציפה. לכן אם נצמצם את התחום מ- ל-  נקבל ש- רציפה ומתקיים  ולכן ניתן לצמצם גם את הטווח ונקבל בדיוק את הפונקציה  ומכאן  רציפה.

לסיכום, מצאנו פונקציה רציפה שגם ההופכית שלה רציפה ולכן זהו הומאומורפיזם.

מש"ל

מסקנה:

יהי  תת מרחב ותהי  פונקציה רציפה. אזי:

 קשיר אמ"מ  קשיר.

הסבר:

על-פי הטענה הקודמת  וראיתם שהומאומורפיזם שומר על קשירות (למעשה אפילו פונקציה רציפה ועל שומרת על קשירות).

**תרגיל**

נתבונן ב- כתת מרחב של . האם הוא תת מרחב קשיר?

פתרון

נניח בשלילה כי הוא קשיר, ונתבונן בפונקציה רציפה . ידוע שפונקציה רציפה מעבירה מרחב קשיר למרחב קשיר,  קשיר, אך  אינו קשיר ולכן  אינו קשיר.

מש"ל

**תרגיל**

הוכיחו שלכל  מתקיים .

פתרון

נמצא את ההומאומורפיזם המפורש. נגדיר  ע"י . הפונקציה ההופכית היא המוגדרת ע"י . קל לראות שהפונקציות רציפות והופכיות אחת לשניה.

מש"ל

הערות:

1.  לכל .
2. .

**תרגיל**

נתבונן בשני תת-מרחבים של :



קבעו האם המרחבים הומיאומורפיים.

פתרון

נוכיח ששני המרחבים אינם הומיאומורפיים.



נניח בשלילה ששני המרחבים הם הומיאומורפיים. לכן קיים הומיאומורפיזם .

נתבונן בשתי נקודות ב-: . שימו לב ש-  הוא מרחב קשיר. הסבר: מעגל פחות נקודה הוא קשיר (לפי התרגיל הקודם), לכן המעגל הימני פחות נקודה קשיר וכנ"ל גם לגבי המעגל השמאלי כשמוציאים ממנו נקודה. חיתוכם לא ריק ולכן גם איחודם קשיר עפ"י משפט.

לכן גם תמונתו תחת הומיאומורפיזם צריכה להיות מרחב קשיר. עם זאת, הפונקציה המצומצמת  היא גם הומיאומורפיזם, אך מתקיים שתמונתה היא מרחב לא קשיר.

הסבר לכך שמעגל ללא שתי נקודות אינו קשיר: מעגל ללא שתי נקודת מתפרק לאיחוד של שתי קבוצות סגורות, זרות ולא ריקות . ברור שהן זרות ולא ריקות. מדוע הן סגורות? כי הן מתקבלות כחיתוך של קשת של מעגל עם המרחב . מכיון שקשת של מעגל סגורה ב- (למעשה אפילו סגורה ב-) נקבל שכל אחד מהחלקים המתקבלים הוא קבוצה סגורה בתת מרחב.

מש"ל

**טענה**

יהי  הומאומורפיזם, אזי  מעביר מרכיב קשירות של  למרכיב קשירות של .

הוכחה

יהי  מרכיב קשירות ולכן בפרט  קשיר.  פונקציה רציפה ולכן גם  קשיר. נראה שהוא קשיר מקסימלית. נניח בשלילה כי קיים תת מרחב קשיר  המקיים  (הכלה ממש). אזי .  רציפה ולכן  קשיר, בסתירה לכך ש-רכיב קשירות.

מש"ל

**תרגיל**

יהי  מרחב טופולוגי. יהיו . נתון:  תת-מרחבים קשירים, וכן . הוכיחו ש-  תת מרחב קשיר.

פתרון

נניח בשלילה שהמרחב  אינו קשיר, ולכן קיימות שתי קבוצות זרות, פתוחות (ב-) ולא ריקות  כך ש-. לפי טענות מהכיתה אנו יודעים שמכיוון ש- קשירים, מתקיים  ו-.

נפצל לשני מקרים. מקרה ראשון: אם שני המרחבים מוכלים באותה קבוצה, נניח בה"כ ששניהם ב-, אזי נקבל סתירה שכן הנחנו  אך  ולכן קיימת נקודה  שאינה נמצאת ב- (שכן  זרות).

מקרה שני: (בה"כ) . לפי הנתון מתקיים . ניזכר שיש קשר בין הסגור במרחב כולו לבין הסגור בתת מרחב: . כעת, קיימת נקודה.

בתרגיל בית ראינו כי בתנאים אלה (כלומר, סגוחה ב- )קיימת פונקציה רציפה . מתקיים . כמו כן, מכיוון ש- סגור ב-, גם התמונה ההפוכה  היא קבוצה סגורה ב-.  מכילה את  ולכן גם את , כלומר  וזו סתירה שכן  כי .

מש"ל