

מבוא לטופולוגיה – תרגיל בית 12 - פתרון

בעיה 1

יהי M מרחב מטרי ותהי $A \subseteq M$ תת קבוצה סגורה.
הוכיחו שקיימת סדרת קבוצות פתוחות $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ב- M המקיימת $U_{n+1} \subseteq U_n$ ו- $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = A$.

הוכחה

יהי $U_n = \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{1}{n})$. מכיוון שלכל $a \in A$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $B(a, \frac{1}{n+1}) \subseteq B(a, \frac{1}{n})$ אנחנו מקבלים: $U_{n+1} \subseteq U_n$.
איברים של הקבוצה A הם המרכזים של הקדורים באיחוד $\bigcup_{a \in A} B(a, \frac{1}{n})$. לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $A \subseteq U_n$,
שמייד גורר $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.
נשאר להוכיח ש- $A \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.
נניח – בשלילה – שקיים $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ כך ש- $b \notin A$. אזי $b \in A^c$.
כיוון ש- A^c קבוצה פתוחה קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $B(b, \frac{1}{n_0}) \subseteq A^c$.
זה גורר ש- $A \cap B(b, \frac{1}{n_0}) = \emptyset$. כלומר, מרחק בין b לבין כל איבר של A לא קטן מ- $\frac{1}{n_0}$. זה גורר $b \notin U_{n_0}$.
כי אחרת היה קיים $a_0 \in A$ כך ש- $b \in B(a_0, \frac{1}{n_0})$ או במילים אחרות $d(a_0, b) < \frac{1}{n_0}$.
אבל $b \notin U_{n_0}$ גורר $b \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. סתירה.

בעיה 2

תהי A תת קבוצה ב- $\mathbb{R}$ כך ש- $\bar{A} = \mathbb{R}$, $A \subsetneq \mathbb{R}$.
הוכיחו שתת מרחב A לא קשור.

הוכחה

נניח - בשלילה - ש- A קשיר. מכיוון ש- $A \neq \mathbb{R}$ קיים $b \in \mathbb{R} - A$
לכן $(b, \infty) \cup (-\infty, b) \subseteq A$. אזי A מוכל או ב- $(-\infty, b)$ או ב- (b, ∞)
כי A קשיר לפי ההנחה ושתי תת הקבוצות האלא פתוחות
ב- $\mathbb{R}$ וזרות. מצד אחר, A קבוצה צפופה ב- $\mathbb{R}$ ($\bar{A} = \mathbb{R}$) ואז
היא חותכת שתי תת הקבוצות הפתוחות. סתירה.

בעיה 3

יהי מ"מ M כך שהקבוצה $M - \{a\}$ לא סגורה.
הוכיחו: קיים שיכון $g: A \rightarrow M$ כאשר $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
וטופולוגיה על A מושרה מ- $\mathbb{R}$.

הוכחה

תענת עזר.

יהי Y מ"מ, b_n סדרה ב- Y כך ש- $b_n \rightarrow b \in Y$
וכל האיברים b_n שונים זה מזה ושונים מ- b .
יהי $B = \{b\} \cup \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. אזי כל קבוצה סגורה בתת מרחב B
היא קבוצה סופית או מכילה את האיבר b .
הוכחת תענת העזר.

כל נקודון סגור במ"מ. לכן כל תת קבוצה סופית סגורה.
נניח בשלילה ש- $S \subseteq B$ קבוצה סגורה, אינסופית ו- $b \notin S$.
אזי איברים של S הם איברי תת סדרה b_{n_i} של סדרה b_n .
לכן $b_{n_i} \rightarrow b \in S$ סגורהת S . סתירה.

הוכחת הבעיה

נסמן $C = M - \{a\}$.

מכיוון ש- C לא סגורה, מתקיים $C \subset \bar{C} = M$. כלומר, $a \in \bar{C}$.
לפי התכונות של סגור כל סביבה של a חותכת את הקבוצה C .
נבנה (באינדוקציה) סדרה $x_n \in C$ כך שכל איבריה שונים זה מזה
ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$.

(x_n כמובן יהיו שונים גם מ- a).

בסיס האינדוקציה.

מכיוון ש- $B(a, 1)$ חותך C קיימת נקודה $x_1 \in C$ כך ש- $d(x_1, a) < 1$.

צעד האינדוקציה

נניח שבנינו $x_1, \dots, x_n \in C$ המקיימים התנאים הנדרשים.

נגדיר $r := \min\{d(x_1, a), \dots, d(x_n, a), \frac{1}{n+1}\}$.

אזי $B(a, r) \cap C \neq \emptyset$, כלומר קיים $x_{n+1} \in C$ כך

ש- $d(x_{n+1}, a) < r$. קל לראות ש- x_{n+1} מקיים את התנאים
הנדרשים. (סוף הבניה).

מקבלים $d(x_n, a) \rightarrow 0$ שגורר $x_n \rightarrow a$.

נגדיר $g: A \rightarrow M$ כך ש- $g\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$ ו- $g(0) = a$. נסמן $D = g(A)$.

נסמן ב- $\hat{g}: A \rightarrow D$ את הפונקציה המתקבלת מ- g על ידי צמצום
הטווח. קל לראות ש- $\hat{g}$ חח"ע ועל.

אנחנו רואים שגם תת מרחב $A \subseteq \mathbb{R}$ וגם תת מרחב $D \subseteq M$ מקימים
תנאי תענת העזר. לכן:

$U \subseteq A$ פתוחה $\Leftrightarrow U^c$ סגורה $\Leftrightarrow$

[לפי תענת העזר] U^c סופית או $0 \in U^c$

$\hat{g}$ חח"ע ועל] $\hat{g}(U^c) = \hat{g}(U)^c$ סופית או $a = \hat{g}(0) \in \hat{g}(U)^c$

[לפי תענת העזר] $\hat{g}(U)^c$ סגורה $\Leftrightarrow \hat{g}(U)$ פתוחה.

כלומר $U \subseteq A$ פתוחה $\Leftrightarrow \hat{g}(U) \subseteq D$ לכן $\hat{g}$ הומיאומורפיזם
ו- g שיכון, מש"ל.

בעיה 4

מצאו מרחב טופולוגי X ופונקציה רציפה $f: [0, \infty) \rightarrow X$ כך ש- f לא פתוחה ולא סגורה.

פתרון

יהי $X = \mathbb{R}$ ו- $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כך ש- $f(x) = x$. לכל $x \in [0, \infty)$ אזי $[0, \infty)$ פתוחה וגם סגורה ב- $[0, \infty)$. אבל $f([0, \infty)) = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ לא פתוחה ולא סגורה ב- $\mathbb{R}$. לכן f לא פתוחה ולא סגורה.

בעיה 5

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. יהי $\sim$ יחס שקילות על מרחב המכפלה $X \times Y$ כך ש- $x_1 = x_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$. הוכיחו ש- $(X \times Y)/\sim$ הומיאומורפי ל- X .

הוכחה

תהי $p_X: X \times Y \rightarrow X$ הטלה של מרחב המכפלה למרחב X . ההטלה היא פונקצית על.

לפי הגדרת p_X ותנאי הבעיה מתקיים:

$$p_X((x_1, y_1)) = p_X((x_2, y_2)) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

כלומר p_X מכבדת מאוד את יחס השקילות. אזי קיימת

העתקה $h: X \times Y \rightarrow (X \times Y)/\sim$ חח"ע ועל כך ש- $p_X = h \circ \rho$,

כאשר $\rho: X \times Y \rightarrow (X \times Y)/\sim$ העתקה ששולחת איבר (x, y)

למחלקת השקילות $[(x, y)]$ אליה הוא שייך.

כידוע ההטלה p_X היא העתקת על רציפה ופתוחה ולכן היא העתקת

מנה. אזי לפי המשפט על העתקות מנה גם h העתקת מנה. אזי

העתקת מנה חח"ע h היא הומיאומורפיזם. לכן $(X \times Y)/\sim$

הומיאומורפי ל- X , מש"ל.