

מועד ב' - בדידה מדעי המחשב (89198)

29.10.2017, ט' חשוון תשע"ח

מרצה: אחיה בר־און
מתרגל: אריאל ויצמן
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- ללא חומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם.
- ניקוד מקסמאלי הוא 120. הניקוד מצוין ליד כל שאלה. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- בשאלות על עוצמות התשובות צריכות להיות מספר סופי או מתוך האפשרויות $\{\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph_0}, 2^{\aleph}\}$.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. [13 נק'] תהא U קבוצה ו $A \subseteq U$ תת קבוצה שלה. נגדיר סדרת קבוצות בצורה רקורסיבית:

$$A_0 = A$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n = A_{n-1}^c \cup A$$

הוכיחו שלכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$A_{2m} = A$$

$$A_{2m-1} = U$$

2. [7 נק' לסעיף] הוכיחו/הפריכו:

(א) יהיו p, q פסוקים לוגיים אזי הפסוק $(p \rightarrow q) \rightarrow q$ הוא טאוטולוגיה.

(ב) יהיו A_1, A_2, A_3 קבוצות קבוצות. אזי $P(A_1 \Delta A_2 \Delta A_3) = P(A_1) \Delta P(A_2) \Delta P(A_3)$.

(ג) תהא $f : X \rightarrow X$ פונקציה ותהא $A \subseteq X$ תת קבוצה אזי $f[f^{-1}[A]] = A$ (שימו לב שהסוגריים המרובעות בשאלה זה מסמנות תמונה ותמונה הפוכה של f).

3. [8 נק' לסעיף] תהא $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ נגדיר יחס \sim על X כך-לכל $f, g \in X$:

$$f \sim g \iff \exists a \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + a$$

(א) הוכיחו כי \sim יחס שקילות.

(ב) הפריכו את הטענה: תהא $f \in X$ אזי $f = f \circ f$ $\iff [f]_{\sim} = [f \circ f]_{\sim}$.

(ג) תהא $f \in X$ מצאו את עוצמת מחלקת השקילות של f . כלומר מצאו $|[f]_{\sim}|$.

(ד) מצאו את עוצמת קבוצת המנה X/\sim .

4. [8 נק' לסעיף] תהא (A, \leq) קבוצה סדורה חלקית.

לכל $x \in A$ נגדיר $B_x = \{y \in A : x \leq y\}$.

(א) נניח כי ב A אין איבר גדול ביותר. הוכיחו $\bigcap_{x \in A} B_x = \emptyset$.

(ב) הוכיחו כי $|\bigcap_{x \in A} B_x| = 1 \iff$ קיים איבר גדול ביותר ב A .

(ג) תנו דוגמא לקס"ח (A, \leq) ואיברים $x_1, x_2 \in A$ כך ש $B_{x_1} \cap B_{x_2} \neq \emptyset$ אבל לא קיים $\inf(B_{x_1} \cap B_{x_2})$ (הקבוצות B_{x_1}, B_{x_2} הוגדרו בראש התרגיל).

5. [6 נק' לסעיף] יהיו n, m טבעיים ויהיו $V_1 = \{d_1, \dots, d_n\}$ קבוצה של n נהגים ו $V_2 = \{c_1, \dots, c_m\}$ קבוצה של m סוגי מכוניות. גרף רשיונות המתאים בין נהגים לסוגי מכוניות הוא גרף פשוט, לא מכוון $G = (V, E)$ כך ש $V = V_1 \cup V_2$ ובנוסף יש קשתות רק בין קודקודים מ V_1 לקודקודים ב V_2 (במילים אחרות אין קשתות בין קודקודים מ V_1 ואין קשתות בין קודקודים מ V_2). כמה גרפי רשיונות קיימים במידה ו (הערה: בחלק מהסעיפים צריך לחלק אם קטן/גדול/שווה ל m):

(א) אין הגבלות נוספות.

(ב) כל קודקוד $v \in V_1$ מקיים $\deg(v) = 1$ (כלומר, כל נהג מותאם לסוג רכב אחד בדיוק)?

(ג) כל קודקוד $v \in V_1 \cup V_2$ מקיים $\deg(v) = 1$ (כלומר, כל נהג מותאם לסוג רכב אחד בדיוק וכל סוג רכב מותאם לנהג אחד בדיוק)?

(ד) כל קודקוד $v_1 \in V_1$ מקיים $\deg(v_1) = 1$ וגם כל קודקוד $v_2 \in V_2$ מקיים $\deg(v_2) \leq 1$ (כלומר, כל נהג מותאם לסוג רכב אחד בדיוק וכל סוג רכב מותאם לנהג אחד לכל היותר)?

(ה) כל קודקוד $v \in V_1$ מקיים $1 \leq \deg(v)$ (כלומר, כל נהג מותאם לפחות לסוג רכב אחד)?

בהצלחה! ☺