המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 05 222 - 88 – סמסטר ב' 30.08.18 תשע"ח מבחן מועד ב'
המרצה: מיכאל מגרל המתרגלים: תמר בר-און, אחיה בר-און

הנחיות:

- יש **לבחור 4 מתוך 5** שאלות. נא לסמן על דף ראשון פנימי מספר תרגיל **שלא בחרתם**.
- כל שאלה שווה 25 נקודות. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות. הציון הסופי לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.
- משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

שאלות ופתרונות:

1. א. נניח $X_1, X_2, \cdots, X_n$ מרחבים מטריזביליים. הוכיחו שמכפלה טופולוגית $\prod_{i=1}^{n} X_i$ גם מטריזבילית.

ב. הוכיחו שקיימת מכפלה טופולוגית אינסופית $X := \prod_{i \in I} X_i$ עם גורמים מטריזביליים $\forall i \in I$ X_i כך ש X לא מטריזבילי ובעלת תכונת T_4.

פתרון:

א. ראו תרגיל 9.1.א.

ב. נגדיר למשל $X := \{0,1\}^{\mathbb{R}} \quad \forall i \in I := \mathbb{R}, \quad X_i = \{0,1\}$.

ע"פ משפט Tychonoff מכפלה של מרחבים קומפקטיים הוא קומפקטי. לכן X קומפקטי. הוא גם האוסדורפי (האוסדורפיות גם כפלית – נשמרת ע"י מכפלה טופולוגית). בהרצאה הוכחהו שמרחב קומפקטי האוסדורפי הוא T_4. לכן גם $X = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$.

מצד שני המרחב X הוא לא מטריזבילי כי הוא בעל העוצמה 2^c שגדול מעוצמה של $card(\mathbb{R}) = c = 2^{\aleph_0}$. כאן חשוב לציין למדנו בהרצאות שכל מרחב מטרי קומפקטי הוא בעל העוצמה לא יותר מ $card(\mathbb{R}) = c$.

2. א. יהיה (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$ היא רציפה.

ב. בהנחה נוספת ש (X,d) קומפקטי הוכיחו שקיימות $a,b \in X$ כך ש $diam(\mathrm{X}) = \mathrm{d}(a,\mathrm{b})$. תנו דוגמה נגדית אם (X,d) חסום כליל אבל לא קומפקטי.

פתרון:

א. ראו תרגיל 9.1.ב.

ב. $X \times X$ קומפקטי בגלל משפט Tychonoff. בעזרת סעיף א ומשפט Weierstrass מקבלים שמתקבל מכסימום בפונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

דוגמה נגדית עם (X,d) חסום כליל מתקבל למשל אם ניקח $(X,d) = (0,1)$.

הקוטר שווה ל 1 אבל הוא לא מתקבל...

3. א. הוכיחו את המשפט הבא: נניח X , Y מרחבים מטריזביליים ו $\mathrm{f} : X \to \mathrm{Y}$ פונקציה.

הוכיחו ש f רציפה אם ורק אם $\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = \mathrm{f}(a)$ לכל סדרה מתכנסת x_n ב X.

ב. תנו דוגמה נגדית אם מדובר במרחב טופולוגי X לא מטריזבילי.

פתרון:

א. חלק ממשפט שהוכחנו בהרצאות.
ב. נגדיר מרחב טופולוגי הבא $X=(\mathbb{R}\cup\{p\},\tau)$ כאשר $p\notin\mathbb{R}$ והטופולוגיה היא $\tau:=\{A\subseteq X: p\in A\Rightarrow card(X\setminus A)\le\aleph_0\}$.
במרחב X היא יש התכנסות טריוויאלית בלבד (ז"א סדרה מתכנסת רק אם היא קבועה לבסוף).
מצד שני בכל מרחב דיסקרטי יש התכנסות טריוויאלית.
לכן דוגמה שאנחנו רוצים אפשר לקבל למשל כפונקצית הזהות
$\mathrm{id}:(X,\tau)\to(\mathrm{X},\tau_{discr})$.
הפונקציה היא שומרת על ההתכנסות אבל הוא לא רציפה.

4. א. נניח X מרחב קומפקטי. הוכיחו: קיים שיכון טופולוגי של X לתוך הקוביה $[0,1]^n$ אם ורק אם קיים אוסף של n פונקציות רציפות $f_i:X\to\mathbb{R}$ $i\in\{1,\cdots,\mathrm{n}\}$ שמפריד נקודות (כלומר לכל $x\neq y$ קיימת $f_i:X\to\mathbb{R}$ כך ש $f_i(x)\neq f_i(y)$).
ב. הוכיחו שקיים מרחב ספרבילי האוסדורפי X עם תת מרחב Y לא ספרבילי.

פתרון:
א. ראו קובץ תרגילים נוספים – שאלה 5.7.
ב. ראו קובץ תרגילים נוספים – שאלה 3.4.

5. א. הוכיחו את המשפט: תמונה רציפה של מרחב קומפקטי גם קומפקטי.
ב. נניח X,Y קשירים. הוכיחו שגם $X\times\mathrm{Y}$ קשיר.

פתרון:
א. ראו את המשפט בהרצאות.
ב. ראו קובץ תרגילים נוספים – שאלה 3.10.

<u>שאלת בונוס</u> (5 נקודות):
הוכיחו שבמרחב בנך $(l_\infty,\|.\|_{\sup})$ של סדרות חסומות קיימת בו נקודה z וסביבה $U\in N(z)$ כך שלכל סביבה $V\in N(z)$ עם $V\subseteq U$ מתקיים: V לא קומפקטית.

פתרון:
ראו קובץ תרגילים נוספים – שאלה 5.3.2.