פתרון מועד א לינארית 2 מדמח 2017

26 ביוני 2017

.1

(א) מהגדרה הפ"א של A הוא

$$p_A(x) = \left| \begin{pmatrix} x-1 & -1 & \cdots & -1 \\ & x-1 & & -1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x-1 \end{pmatrix} \right| = (x-1)^n$$

כי זה דטר' של מטריצה משולשית. לכן ל A יש ע"ע יחיד 1 שהוא מר"א n. בנוסף הר"ג של 1 הוא

$$\dim N(A-I) = \dim N \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ & 0 & & -1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \dim N \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & -1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 1$$

ולכן צורת זורדן של A מכילה בלוק יחיד לע"ע 1 ולכן $A \sim J_n(1)$.

(ב) עבור מטריצה A מרוכבת יש שתי אפשרויות

i. A לכסינה ואז $A \sim J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2)$ כאשר λ_1, λ_2 ע"ע שלה (לא בהכרח שונים) ואז $\alpha A \sim J_1(\alpha\lambda_1) \oplus J_1(\alpha\lambda_2)$ (פשוט להכפיל את השיוון $A = P^{-1}DP$ ב α, כאשר P היא המטריצה המלכסנת ו D אלכסונית עם ע"ע על האלכסון).

ii. A אינה לכסינה ואז $A \sim J_2(\lambda)$ כאשר λ הוא ע"ע שלה מר"א 2 $\alpha A \sim \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \alpha \\ & \alpha\lambda \end{pmatrix}$. נמצא זורת זורדן של מטריצה זאת (והיא תהיה צורת זורדן של αA) . רואים כי הע"ע של $\begin{pmatrix} \alpha\lambda & \alpha \\ & \alpha\lambda \end{pmatrix}$ הוא $\alpha\lambda$ בלבד. מה הר"ג ? אם $\alpha \neq 0$ נקבל כי

$$\dim N(\begin{pmatrix} \alpha\lambda & \alpha \\ & \alpha\lambda \end{pmatrix} - \alpha\lambda I) = \dim N \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ & 0 \end{pmatrix} = 1$$

ואז בצורת זורדן יהיה בלוק אחד ונקבל $\begin{pmatrix} \alpha\lambda & 1 \\ & \alpha\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \alpha \\ & \alpha\lambda \end{pmatrix} \sim \alpha A$. אם $\alpha = 0$ נקבל כי $\alpha A = 0$ וזוהי צורת זודן שלה.

.2

(א) לפי הגדרה

$$p_A(x) = \left|\begin{pmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ -1 & x-2 & 1 \\ 1 & -1 & x-4 \end{pmatrix}\right| \overset{(1)}{=} \left|\begin{pmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ -1 & x-2 & 1 \\ 0 & x-3 & x-3 \end{pmatrix}\right| \overset{(2)}{=} (x-3)\left|\begin{pmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ -1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| =$$

$$\overset{(3)}{=} (x-3)\left|\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ -1 & x-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{(4)}{=} (x-3)^2\left|\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{(5)}{=} (x-3)^2\left|\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{(5)}{=} (x-3)^2(x-1)$$

כאשר (1) זה חיבור שורה שניה לשורה שלישית, (2)זה הוצאת גורם משותף משורה שלישית, (3) זה חיסור עמודה שלישית מעמודה שניה, (4) הוצאת גורם משותף מעמודה שניה, (5) זה פיתוח לפי שורה שלישית ו (6) זה דטר' של מטריצה משולשית.

(ב) הע"ע הם השורשים של $p_A(x)$ ולכן הע"ע של A הם $\{3,1\}$. הר"א של 3 הוא 2, הר"א של 1 הוא 1. נחשב מ"ע: עבור $\lambda = 3$ נדרג את $A-3I$ כדי למצוא את מרחב האפס

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר שתי שורות התחתונות מתאפסות כי הם כפולה של השורה הראשונה + חילוק ב -2 השורה הראשונה. לכן

$$V_3 = \left\{\begin{pmatrix} s+t \\ t \\ s \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

מה שמופיע בסוגריים של ה $span$ זהו בסיס למרחב העצמי ולכן הר"ג של 3 הוא 2. עבור $\lambda = 1$ נדרג את $A - I$ כדי למצוא את מרחב האפס

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$V_1 = \left\{\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

מה שמופיע בסוגריים של ה $span$ זהו בסיס למרחב העצמי ולכן הר"ג של 1 הוא 1.

(ג) היא לכסינה כי הפ"א מל"ל ובנוסף לכל ע"ע הר"א = ר"ג. נגדיר P להיות מטריצה שעמודותיה הם הו"ע של A למשל,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז לפי התיאוריה (וגם חישוב ישיר) נקבל כי

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסנית שעל האלכסון מופיעים הע"ע של A (בהתאמה למיקום הו"ע המתאימים ב P).

.3

(א) הפרכה: למשל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י כפל במטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. אזי $W=\mathbb{R}^2=V$ הוא T־ אינו' (תמיד V הוא T־ אינו') אבל $W_0=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ אינו T־ אינו' כי $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\notin W_0$.

(ב) נסמן $S=T-id_V$ אזי נתון כי $S^k=0, S^{k-1}\neq 0$ לכן הפ"מ של S הוא $m_S(x)=x^k$ לפי הגדרה. כעת $0=S^k=(T-id)^k$ ולכן T מאפסת את $p(x)=(x-1)^k$. טענה: $m_T(x)=p(x)$ הוא הפ"מ של T. הוכחה: יהא $q(x)$ פולינום כך ש T מאפס אותו. כלומר $q(T)=0$. נראה כי $\deg q(x)\geq k=\deg p(x)$ וזה יוכיח כי $p(x)$ הפ"מ של T. אכן, נגדיר פולינום נוסף $q_1(x)=q(x+1)$ מאותה דרגה של $q(x)$. הוא מקיים כי

$$q_1(S)=q(S+id)=q(T-id+id)=q(T)=0$$

ולכן S מאפסת את $q_1(x)$ ולכן $\deg q(x)=\deg q_1(x)\geq k=\deg m_S(x)$ כנדרש. כעת, נחזור לשאלה ונקבל כי

$$V=\ker{(T-id)}^k$$

הוא הפירוק הפרימרי של V לפי T.

4. נפעיל גרם שמידט על

$$B=\left\{v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(אם B בסיס של W התהליך יעבוד). נגדיר

$$w_1=v_1$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{0}{\|w_1\|^2}w_1=v_2$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{3}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-1\\2/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

ואז $\{w_1,w_2,w_3\}$ בסיס או"ג ל W ואם ננרמל כל אחד מהם נקבל

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{3}{\sqrt{15}}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס או"נ ל W.