

תשפ"ג, מועד א' - פתרון

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \tan(x)}{x^3} \quad (\text{א})$$

פתרון:

נסדר ונחשב את הגבול בעזרת גבולות מוכרים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \tan(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{(1 - \cos(x))}{x^2} = \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \quad (\text{ב})$$

פתרון:

נוציא גורם דומיננטי בתחום $x < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} &= \frac{2x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x + 1} = \frac{2x + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} = \\ &= \frac{2x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} = \frac{x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

ולכן

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2 - \sqrt{1 + 0}}{1} = \frac{2 - 1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

זה קל כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^3}{3^2} \right)^n = 0$$

כי $q^n \rightarrow 0$ מקיים $q = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1$

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x) + ax - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 - a & x = 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?

פתרון:

נבדוק מתי

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 - a$$

לפי הגדרה

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + ax - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - 1}{x} + a \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{\cos(x) - 1}{x^2} + a \right) = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + a = a$$

לכן צריך לבדוק לאילו ערכי a מתקיים $1 - a = a$. זה $1 = 2a$ כלומר $a = \frac{1}{2}$.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון:

גזירות גוררת רציפות ולכן בשביל ש f תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך ש $a = \frac{1}{2}$. נבדוק האם עבור ערך זה הפונקציה

גזירה גם ב $x = 0$. אם כן, נחשב את הנגזרת שמה וזה תהיה התשובה ואם לא אז התשובה של קיים a .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x) + \frac{1}{2}x - 1}{x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

נבדוק לפי הגדרה האם קיים הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x) + \frac{1}{2}x - 1}{x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

לכן $f'(0)$ קיים ושווה ל $-\frac{1}{2}$.

3. נביט בפונקציה $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan(x)$

(א) מצאו את הערך המינימאלי של $f(x)$

פתרון:

נגזור ונשווה לאפס על מנת למצוא נקודות קיצון (ובפרט נקודות מינימום מקומי):

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} \cdot (2x) - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x - 1}{1 + x^2}$$

ולכן $f' = 0$ רק ב $x = 1$. מימין ל 1 הנגזרת חיובי ולכן הפונקציה עולה שמה ומשמאל ל 1 הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת שמה. מכאן ש 1 הוא נקודת מינימום מקומי שאפילו נקודת מינימום מוחלט. הערך שמה הוא

$$f(1) = \frac{1}{2} \ln(2) - \arctan(1) = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi}{4}$$

(ב) מצאו כמה פתרונות יש למשווה $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) = \arctan(x)$

פתרון:

בעצם השאלה היא כמה שורשים יש ל $f(x)$ מהסעיף הקודם. גילנו ש $f(1)$ זה נקודת מינימום מוחלט והפונקציה יורדת (ממש) עד 1 ועולה (ממש) מ 1 ולכן בעצם השאלה היא איפה נמצא $f(1)$. אם הוא בדיוק בציר x אז ל $f(x) = 0$ יש פתרון יחיד, אם הוא מעל ציר x אז ל $f(x) = 0$ אין פתרון כלל ואם הוא מתחת לציר x אז ל $f(x) = 0$ יהיו בדיוק שתי פתרונות שהרי

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) = \infty - \pm \frac{\pi}{2} = \infty$$

לכן השאלה מתנקזת למה הוא הסימן של $f(1) = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi}{4}$ (חיובי, שלילי או אפס). ננסה בלי מחשבון:

$$\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi}{4} < 0$$

$$\frac{1}{2} \ln(2) < \frac{\pi}{4}$$

$$\ln(\sqrt{2}) < \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2} < e^{\frac{\pi}{4}}$$

האם $\sqrt{2} < e^{\frac{\pi}{4}}$? נעשה חסימות ידועות

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{2}{4}} < 2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{\pi}{4}} < e^{\frac{\pi}{4}}$$

לכן $f(1) < 0$ ולמשוואה $f(x) = 0$ יש שתי פתרונות בדיוק.

4. נתונה הסדרה הבאה ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ וכן $0 < a_1 < 1$.

(א) הוכיחו כי לכל n מתקיים $a_n \leq 1$.

פתרון:

ננסה באינדוקציה:

- בסיס $n = 1$: אכן $a_1 \leq 1$ כי נתון ש $a_1 < 1$
- צעד: נניח כי עבור n מסוים מתקיים $a_n \leq 1$ ונוכיח כי $a_{n+1} \leq 1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$$

ומכיון ש $a_n \leq 1$ נקבל ש $2 - a_n \geq 1$ ואז $\frac{1}{2-a_n} \leq \frac{1}{1} = 1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \leq 1$$

כפי שרצינו.

(ב) הוכיחו כי הסדרה מנוטונית עולה.

פתרון:

צריך להוכיח שלכל n מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$. זה שקול ל

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$$\frac{1}{2 - a_n} \geq a_n$$

כיוון ש $2 - a_n \geq 1 > 0$ נוכל לכפול בו ולשמר את אי-השוויון:

$$1 \geq a_n (2 - a_n) \geq a_n \cdot 1$$

וזה אכן מתקיים לפי סעיף קודם.

(ג) חשבו את גבול הסדרה.

פתרון:

ראינו שהסדרה עולה (בסעיף קודם) וחסומה מלמעלה (סעיף ראשון) ולכן יש לה גבול סופי $a_n \rightarrow L$ וכעת נשתמש בהגדרה

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$$

ונשאיף את שני הצדדים (הערה: $a_n \leq 1$ ולכן גם $L \leq 1$) לקבל

$$L = \frac{1}{2 - L}$$

$$L(2 - L) = 1$$

$$0 = L^2 - 2L + 1$$

$$0 = (L - 1)^2$$

לכן $L = 1$.

5. תהי f הגזירה בכל $\mathbb{R}$ המקיימת כי $f(0) < f(1)$ וכן $f(2) < f(1)$.

(א) הוכיחו שקיימת c עבורה $f(c) = f(c + 1)$.

פתרון:

נתחיל בלהעביר אגף

$$f(c+1) - f(c) = 0$$

ונגדיר $g(x) = f(x+1) - f(x)$. נרצה להראות של g יש שורש וכלומר שקיימת c כך ש $g(c) = 0$. נשתמש במעט הנתונים שיש לנו בשביל לחשב את הערך של g בנקודות מסוימות (יותר נכון את הסימן ולא הערך עצמו)

$$g(1) = f(2) - f(1) < 0$$

$$g(0) = f(1) - f(0) > 0$$

כעת, נתון ש f גזירה ולכן רציפה ולכן גם g רציפה. קיבלנו פונקציה g רציפה שמקיימת $g(1) < 0$ ו $g(0) > 0$ וממשפט ערך הביניים נקבל שקיימת $0 < c < 1$ כך ש $g(c) = 0$ כפי שרצינו.

(ב) הוכיחו שקיימת נקודה d עבורה $f'(d) = 0$.

פתרון:

קיבלנו בסעיף קודם שקיימת נקודה c כך ש $f(c) = f(c+1)$ ולכן משפט רול (הפונקציה f רציפה ב $[c, c+1]$ וגזירה ב $(c, c+1)$ ומקיימת שערכי הפונקציה בקצוות שווים) קיימת נקודה $d \in (c, c+1)$ כך ש $f'(d) = 0$.