

פתרון בוחן במשוואות דיפרנציאליות רגילות

משך הבחינה: שעה ורבע חומר עזר מותר: מחשבון פשוט.

ענו על כל השאלות הבאות. נמקו את צעדיכם!

שאלה 1:

מצאו פתרון למשוואה $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ עבורו $y(1) = 1$.

דרך ראשונה: נפתור את המד"ר כמד"ר הומוגנית-

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

כאשר

$$g(z) = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$$

ולכן עבור $z = \frac{y}{x}$ נקבל כי

$$\int \frac{1}{g(z) - z} dz = \ln|x| + C$$

נחשב את האינטגרל

$$\int \frac{1}{g(z) - z} dz = \int \frac{1}{\frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - z} dz = -2 \int \frac{1}{z + \frac{1}{z}} dz = - \int \frac{2z}{z^2 + 1} dz = -\ln|z^2 + 1|$$

כיוון ש $z^2 + 1 > 0$ אפשר להתעלם מהערך המוחלט.

$$-\ln(z^2 + 1) = \ln|x| + C$$

$$\ln(z^2 + 1) = -\ln|x| - C$$

$$z^2 + 1 = e^{-\ln|x| - C} = e^{-C} \cdot \frac{1}{e^{\ln|x|}} = e^{-C} \cdot \frac{1}{|x|}$$

לכן

$$z = \pm \sqrt{\frac{e^{-C}}{|x|} - 1}$$

כעת נזכור כי $y = zx$ ולכן

$$y = \pm x \sqrt{\frac{e^{-c}}{|x|} - 1}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה

$$y(1) = 1$$

$$1 = \pm \sqrt{e^{-c} - 1}$$

לכן חייב לבחור את הפתרון החיובי, ויוצא כי

$$e^{-c} = 2$$

לכן סה"כ הפתרון שמצאנו הוא

$$y = x \sqrt{\frac{2}{|x|} - 1}$$

הערה: מי שהתעלם מהערך המוחלט מצא גם פתרון לשאלה,

פשוט אחד שמוגדר בתחום מצומצם יותר, אבל זה בסדר כי עדיין $y(1) = 1$, וממילא פתרון זה אינו מוגדר ב $x = 0$.

דרך שנייה: נפתור כמד"ר מדוייקת-

נעבור לכתוב הדיפרנציאלי

$$2xydy + (-y^2 + x^2)dx = 0$$

$$(2xy)_x = 2y$$

$$(-y^2 + x^2)_y = -2y$$

זה לא מדוייק, נחפש גורם אינטגרציה

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-2y - 2y}{2xy} = -\frac{2}{x}$$

לכן

$$\mu(x) = e^{-2 \int \frac{1}{x}} = e^{-2 \ln(x)} = \frac{1}{(e^{\ln(x)})^2} = \frac{1}{x^2}$$

נכפול את גורם האינטגרציה במד"ר

$$\frac{2y}{x} dy + \left(-\frac{y^2}{x^2} + 1 \right) dx = 0$$

נוודא שהמד"ר אכן מדוייקת

$$\left(\frac{2y}{x} \right)_x = -\frac{2y}{x^2}$$

$$\left(-\frac{y^2}{x^2} + 1 \right)_y = -\frac{2y}{x^2}$$

י"א, הצלחנו.

כעת

$$F = \int \frac{2y}{x} dy + c(x) = \frac{y^2}{x} + c(x)$$

נגזור ונשווה למקדם השני, כלומר נדרוש

$$F_x = -\frac{y^2}{x^2} + 1$$

כלומר

$$-\frac{y^2}{x^2} + c'(x) = -\frac{y^2}{x^2} + 1$$

לכן

$$c'(x) = 1$$

לכן

$$c(x) = x$$

סה"כ קיבלנו

$$F(x, y) = \frac{y^2}{x} + x$$

לכן הפתרון נתון באופן סתום ע"י

$$\frac{y^2}{x} + x = C$$

נציב (פעם ראשונה בתרגיל זה) את תנאי ההתחלה $y(1) = 1$

$$\frac{1}{1} + 1 = C$$

לכן הפתרון נתון באופן סתום ע"י

$$\frac{y^2}{x} + x = 2$$

נחלץ את הפתרון

$$y^2 + x^2 = 2x$$

$$y^2 = 2x - x^2$$

ולכן

$$y = \pm \sqrt{2x - x^2}$$

כאן המקום לוודא את תנאי ההתחלה בשנית! כיוון ש $y(1) = 1$ חייבים לבחור את הפתרון החיובי

$$y = \sqrt{2x - x^2}$$

איך איבדנו כך את המשך הפונקציה שמצאנו בשיטה הקודמת? זה קורה בגלל שהפונקציה אינה גזירה באפס.

שאלה 2:

מצאו פתרון למשוואה $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$ עבורו $y(1) = -1$.

נבדוק אם מדובר במד"ר מדויקת:

$$(x^2 + y^2 + x)_y = 2y$$

$$(xy)_x = y$$

זה לא. נחפש גורם אינטגרציה

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

ולכן גורם האינטגרציה הוא

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\ln(x)} = x$$

נכפול בגורם האינטגרציה

$$(x^3 + y^2x + x^2)dx + x^2ydy = 0$$

נבדוק

$$(x^3 + y^2x + x^2)_y = 2yx$$

$$(x^2y)_x = 2xy$$

הצלחנו, ייאי.

$$F = \int (x^3 + y^2x + x^2)dx + c(y)$$

$$F = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c(y)$$

נדרוש כי

$$F_y = x^2y$$

כלומר

$$yx^2 + c'(y) = x^2y$$

לכן $c(y) = 0$

כלומר הפתרון נתון באופן סתום ע"י

$$\frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C$$

נציב את תנאי ההתחלה בפעם הראשונה, $y(1) = -1$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = C$$

$$C = \frac{3 + 6 + 4}{12} = \frac{13}{12}$$

נחלץ את הפונקציה

$$\frac{y^2x^2}{2} = \frac{13}{12} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$y^2 x^2 = \frac{13}{6} - \frac{2}{3} x^3 - \frac{x^4}{2}$$

$$y^2 = \frac{13}{6x^2} - \frac{2}{3} x - \frac{x^2}{2}$$

ולכן

$$y = \pm \sqrt{\frac{13}{6x^2} - \frac{2}{3} x - \frac{x^2}{2}}$$

שוב נוודא את תנאי ההתחלה, וכיוון ש $y(1) = -1$ נובע כי צריך לקחת את הפתרון השלילי

$$y = -\sqrt{\frac{13}{6x^2} - \frac{2}{3} x - \frac{x^2}{2}}$$

שאלה 3:

חווה "ביצה טרופה" רכשה 25 תרנגולות. תהליך גידול התרנגולות בחווה מקיים את המשוואה הלוגיסטית $\frac{dy}{dt} = ky(10000 - y)$. כמה זמן

ייקח לאוכלוסיית התרנגולות בחווה להגיע ל-7000, אם כעבור שנה מספר התרנגולות עלה ל-400?

נתון כי $y(0) = 25$ וכן $y(1) = 400$.

עלינו למצוא את t עבורו $y(t) = 7000$.

בשביל זה צריך לפתור את המד"ר...

מדובר במד"ר ברנולי:

$$y' = 10000ky - ky^2$$

$$y' - 10000ky = -ky^2$$

$$\text{נציב } z = y^{1-2} = \frac{1}{y} \text{ ונקבל}$$

$$z' + (-1) \cdot (-10000k)z = (-1) \cdot (-k)$$

כלומר

$$z' + 10000kz = k$$

זו משוואה לינארית,

$$a(t) = 10000k$$

$$A(t) = 10000kt$$

$$b(t) = k$$

ולכן הפתרון הוא

$$z(t) = e^{-10000kt} \left(C + \int k e^{10000kt} dt \right) = \frac{C}{e^{10000kt}} + \frac{1}{10000}$$

כעת נזכור כי $z = \frac{1}{y}$ ולכן $y = \frac{1}{z}$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{C}{e^{10000kt}} + \frac{1}{10000}}$$

נציב את הנתונים

$$y(0) = 25$$

$$y(1) = 400$$

$$25 = \frac{1}{C + \frac{1}{10000}}$$

$$C + \frac{1}{10000} = \frac{1}{25}$$

$$C = \frac{400}{10000} - \frac{1}{10000} = \frac{399}{10000}$$

כעת נציב $t = 1$

$$400 = \frac{1}{\frac{\frac{399}{10000}}{e^{10000k}} + \frac{1}{10000}}$$

$$400 = \frac{10000}{\frac{399}{e^{10000k}} + 1}$$

$$1 = \frac{25}{\frac{399}{e^{10000k}} + 1}$$

$$\frac{399}{e^{10000k}} + 1 = 25$$

$$\frac{399}{24} = e^{10000k}$$

$$10000k = \ln\left(\frac{399}{24}\right)$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{399}{24}\right)}{10000}$$

לכן

$$e^{10000kt} = e^{\ln\left(\frac{399}{24}\right)t} = \left(\frac{399}{24}\right)^t$$

לבסוף נפתור את המשוואה $y(t) = 7000$

$$7000 = \frac{10000}{\frac{399}{\left(\frac{399}{24}\right)^t} + 1}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{\frac{399}{\left(\frac{399}{24}\right)^t} + 1}$$

$$\frac{399}{\left(\frac{399}{24}\right)^t} + 1 = \frac{10}{7}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{399}{24}\right)^t} = \frac{\frac{10}{7} - 1}{399}$$

$$\left(\frac{399}{24}\right)^t = \frac{399 \cdot 7}{3} = 133 \cdot 7$$

נפעיל $\ln$ על שני האגפים

$$t \cdot \ln\left(\frac{399}{24}\right) = \ln(133 \cdot 7)$$

$$t = \frac{\ln(133 \cdot 7)}{\ln\left(\frac{399}{24}\right)} \approx 2.43$$

קצת פחות משנתיים וחצי.

בהצלחה!

נוסחאון מד"ר

חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:

כתיב דיפרנציאלי – את המד"ר $y' = f(x, y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x, y)dx$

מד"ר פרידה – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$

כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

מד"ר הומוגנית – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z} dz = \ln|x| + C$. נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$.

ניתן להציג את $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) f(x, y)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.
 במקרה זה $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

מד"ר לינארית מסדר ראשון – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחה

$$y = e^{-A(x)} \left(C + \int b(x) e^{A(x)} dx \right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x) dx$

משוואת ברנולי – יהי $n \neq 0, 1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.

נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.

נמצא את z ונחליף $y = z^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$.

מד"ר מדוייקת – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x, y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.

שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.
2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F = \int P dx + c(y)$.
3. נגזור ונשווה למקדם השני $Q = \frac{\partial}{\partial y} (\int P dx + c(y))$, וכך נמצא את $c(y)$.
4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x, y) = C$.

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1.

א. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ אינו תלוי ב- y ,

במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$

ב. יש גורם אינטגרציה $\mu(y)$ אם הביטוי $\frac{Q_x - P_y}{P}$ אינו תלוי ב- x ,

במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$

2. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).

3. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y' = f(x, y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.

המשוואה האינטגרלית – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

משפט הקיום והיחידות – תהי $f(x, y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$.

נסמן ב- M את החסם של $|f(x, y)|$ בתחום, ונסמן $a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

אזי קיים פתרון יחיד y לבעיית הקושי $y' = f(x, y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ בתחום $|x - x_0| \leq a'$.

חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1. $y(t)$ מיקום

2. $v(t) = y'(t)$ מהירות

3. $a(t) = y''(t)$ תאוצה

החוק השני של ניוטון – $F = ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g \approx 9.82 \text{ m/sec}^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם y הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.