תרגיל בית 4 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב׳ תשפ״א

שאלה 1.

א. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/_{\langle x^2\rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/_{\langle x^2-1\rangle}$$

ב. הוכיחו שהחוגים הבאים **לא** איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\langle x^2\rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\langle x^2-1\rangle}$$

ג. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/_{\langle xy-1\rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/_{\langle x^2+y^2-1\rangle}$$

שאלה 2. יהי $\mathbb{H}$ חוג הקווטרניונים של המילטון.

א. הוכיחו כי $\mathbb{H}$ אינו איזומורפי לחוג $M_2(\mathbb{R})$. שימו לב שזה מפתיע, כי שניהם חוגים פשוטים ושהם איזומורפיים כמרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$ (שניהם ממימד 4).

ב. רשות: הוכיחו שהחוג

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

איזומורפי לחוג $M_2(\mathbb{R})$. רמז: הראו שהחוגים האלו צמודים כתת־חוגים של $M_2(\mathbb{C})$. בדרך אחרת, למי שמכיר, מצאו מערכת של יחידות מטריצה ובנו את האיזומורפיזם בינהם בעזרתה.

שאלה 3. ראינו שעבור קבוצה X, אז $(P(X), \triangle, \cap)$ הוא חוג בוליאני. בתרגיל בית 1 הוכחתם שכל חוג בוליאני הוא חילופי. ננסה להוכיח את הכיוון ההפוך: כל חוג בוליאני A משוכן בחוג מן הצורה $(P(X), \triangle, \cap)$.

א. הוכיחו שלכל $a \in A$ מתקיים $a + a = 0$ (ובפרט המאפיין של A הוא 2).

ב. הוכיחו שהשדה היחיד שהוא גם חוג בוליאני הוא $\mathbb{F}_2$.

ג. הוכיחו שלכל אידאל מקסימלי $M \lhd A$ מתקיים $A/M \cong \mathbb{F}_2$.

ד. יהי $M \lhd A$ אידאל מקסימלי ויהי $a \in A$. הוכיחו כי $a \in M$ או $1 - a \in M$, אבל לא שניהם.

ה. יהי $0 \neq a \in A$. הוכיחו שקיים אידאל מקסימלי $M \lhd A$ שאינו מכיל את a.

ו. תהי X קבוצת כל האידאלים המקסימליים של A. הוכיחו שההעתקה $\varphi\colon A \to (P(X), \triangle, \cap)$ השולחת איבר $a \in A$ לקבוצת כל האידאלים המקסימליים שלא מכילים אותו היא שיכון של חוגים.

שאלה 4. יהי R חוג, ויהי $P \lhd R$ אידאל. נזכר ש-P הוא ראשוני אם לכל $A, B \lhd R$ המקיימים $AB \subseteq P$, אז $A \subseteq P$ או $B \subseteq P$. הוכיחו שתנאים הבאים שקולים:

א. P הוא ראשוני.

ב. לכל $a, b \in R$ אם מכפלת האידאלים הראשיים $\langle a\rangle \langle b\rangle \subseteq P$, אז $a \in P$ או $b \in P$.

ג. לכל $A, B \leq_l R$ אידאלים שמאליים המקיימים $AB \subseteq P$, אז $A \subseteq P$ או $B \subseteq P$.

ד. לכל $A, B \leq_r R$ אידאלים ימניים המקיימים $AB \subseteq P$, אז $A \subseteq P$ או $B \subseteq P$.

שאלה 5. יהי R תחום שלמות.

א. הוכיחו כי $R \times \{0\} \lhd R \times R$ הוא אידאל ראשוני.

ב. לכל $n \in \mathbb{N}$ מצאו חוג שיש לו בדיוק n אידאלים ראשוניים נאותים. רמז: הסעיף הקודם עם תחום שלמות מיוחד.

שאלה 6. יהי $f\colon R \to S$ הומומורפיזם של חוגים חילופיים, ויהי $I \lhd S$ אידאל ראשוני. הוכיחו כי $f^{-1}(I) \lhd R$ הוא אידאל ראשוני.
הסיקו את המקרה הפרטי שבו R הוא תת־חוג של S ו-f היא השיכון הטבעי: אם $I \lhd S$ אידאל ראשוני, אז $I \cap R$ הוא אידאל ראשוני של R.

שאלה 7. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שחיתוך שני אידאלים מקסימליים שונים של R אינו אידאל ראשוני.

שאלה 8. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שכל אידאל ראשוני מכיל את כל האיברים הנילפוטנטיים. הסיקו מכך שהקבוצה של כל האיברים הנילפוטנטיים מוכלת בחיתוך של כל האידאלים הראשוניים. (למעשה יש שיוויון!)

בהצלחה!