תרגיל מס 2 - אינפי 4 תשע`ט

18 במרץ 2019

ניתן להניח שהאינגרל לפי אורך אינו תלוי בפרמטירזציה כל עוד היא פשוטה או בעלת מספר סופי של נקודות x עבורן $0<\left|\gamma^{-1}\left(\{x\}\right)\right|$. (כלמר בתרגילים חישוביים - מספיק למצוא פרמטריזציה פשוטה (עד או חח"ע פרט למספר סופי של נקודות). אין צורך להוכיח שהאינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה שנבחרה.

1. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך עם תמונה Γ ותהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו ש f אינטגרבילית ביחס לאורך γ. (רמז: תנסו לחקות את ההוכחה עבור אינטגרל רימן ולהחליף את Δx ב $\left\|\gamma\left(t_k\right)-\gamma\left(t_{k-1}\right)\right\|$.)

2. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך ו $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך ש $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ קיים. (קיים אינטגרל של f על לפי אורך γ.)

   (א) הוכיחו שכל $[c,d]\subseteq[a,b]$ עם $\tilde{\gamma}=\gamma|_{[c,d]}$ אזי $\int_{\tilde{\gamma}}f\mathbf{d}l$ קיים.

   (ב) הוכיחו

$$\lim_{c\to a}\int_{\gamma|_{[c,b]}}f\mathbf{d}l=\lim_{c\to b}\int_{\gamma|_{[a,c]}}f\mathbf{d}l=\int_\gamma f\mathbf{d}l$$

   (ג) הוכיחו שאם γ' קיימת פרט למספר סופי של נקודות $c_1,\ldots,c_{n-1}$ בקטע $[a,b]$ גזירה ברציפות בקטעים $[c_{i-1},c_i]$ כאשר $a=c_0$ ו $b=c_n$ אזי האינטגרל אם האינטגרל $\int_{c_{i-1}}^{c_i}\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|dt$ קיים לכל i ו f רציפה, אזי $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ קיים ומתקיים

$$\int_\gamma f\mathbf{d}l=\int_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|\mathbf{d}t$$

כאשר $\int_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|\mathbf{d}t$ הוא סכום האינטגרלים $\sum_{i=1}^n\int_{c_{i-1}}^{c_i}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|\mathbf{d}t$.

3. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה בעלת אורך.

   (א) הוכיחו שאם f אינטגרבילית לפי אורך ביחס ל γ, אזי f חסומה.

   (ב) הוכיחו שאם f אינטגרבילית אזי $\int_\gamma f\mathbf{d}l\le ML\left(\gamma\right)$.

4. חשבו את האינטגרלים הבאים:

   (א) $\int_\Gamma\left(x+y\right)\mathbf{d}l$ כאשר $\gamma=\{(x,y):|x|+|y|=1\}$

   (ב) $\int_\gamma\left(2x+y+z\right)\mathbf{d}l$ כאשר $\gamma\left(t\right)=\left(t+1,t+2,3\right)$ עבור $0\le t\le2$.

ג) $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y)\,|x^2+y^2=4x\right\}$.

ד) $\int_\Gamma xyz\mathbf{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y,z)\,|x=t, y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z=\frac{1}{2}t^2|0\le t\le 1\right\}$.

ה) $\int_\Gamma |y|\,\mathbf{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y):y^2=4x, x\in[0,1]\right\}$.

5. נתון קפיץ $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,3t)$ כך שצפיפות המסה בנקודה (x,y,z) נתונה על ידי $x^2+y^2+z^2$. חשבו את מסת הקפיץ אם נתון שקצה אחד שלו נמצא ב $(1,0,0)$ ואורכו $\sqrt{360}\pi$.