

**משפט (על השיכון והומיאומורפיזם):**

נניח  $f: X \rightarrow Y, Y \in T_2, X \in Comp$  רציפה ו"חח"ע. אזי  $f$  שיכון טופולוגי (ז"א  $f: X \rightarrow f(X)$  הומיאומורפיזם).

**הוכחה:** מ"ל את המשפט בהנחה ש-  $f$  על. ואז צ"ל  $f$  הומיאומורפיזם. תנאים (1) ו- (2) בהגדרת הומיאומורפיזם מתקיימים עפ"י הנתון (ישר).

$$(3) \text{ רציפות של ההופכי } - X \xleftarrow{f^{-1}} Y = f(X)$$

לפי קריטריון 3 על רציפות, מספיק להראות ש-  $f$  פונקציה סגורה. כאן נשתמש במשפט הקודם.



**הערה:** א. במקרה הפרטי, אם בנוסף  $f$  על אז נקבל הומיאומורפיזם.

ב. קומפקטיות של  $X$  חשובה מאוד. ראינו דוגמאות...

ג.  $f(X)$  סגור.

**תוצאה:** נניח  $(X, \tau) \in Comp$  ו-  $\sigma$  טופולוגיה על  $X$  עם תכונת  $T_2$  (Hausdorff) כך ש  $\sigma \subseteq \tau$ . אז  $\sigma = \tau$ .

**הגדרה:** נניח  $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$  אוסף תת קבוצות בקבוצה  $X$ .

(א)  $\alpha \in FIP$  תכונת החיתוך הסופי, אם -  $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$  לכל  $J \subseteq I$  סופית.

(ב)  $\alpha \in IP$  אם  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ .

(ברור ב  $\Leftarrow$  א).

**דוגמה:** כל סדרה  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  יורדת  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  של קבוצות לא ריקות היא FIP

למשל:  $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}, n \in \mathbb{N}$

$$\alpha = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in FIP \setminus IP$$

משפט (קריטריון FIP של Comp): נניח  $X$  מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

$$(1) X \in \text{Comp}$$

$$IP \ni \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} FIP \ni \alpha = \{A_i\}_{i \in I} \\ \forall i \in I: A_i \text{ סגורה} \end{cases} (2)$$

הוכחה:

שימו לב ש-  $\{O_i\}_{i \in I}$  כיסוי פתוח של  $X$  אם ורק אם האוסף של המשלימים  $\{O_i^c\}_{i \in I}$  (קבוצות סגורות) הוא לא  $IP$ .

$$\bigcup O_i = X \Leftrightarrow \bigcap O_i^c = \emptyset$$

כללי *de Morgan* והגדרת  $Comp$ ...

■

דוגמה:  $\mathbb{R} \notin \text{Comp}$  (דרך  $FIP$ ).

$A_n := [n, \infty), n \in \mathbb{N}$  סגורות ו-  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in FIP \setminus IP$$

דוגמה:  $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \notin \text{Comp}$

$$A_k = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, k \leq n\} \text{ סגור } A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$$

תזכורת: קריטריון Cantor לשלמות מאינפני:

התנאים הבאים שקולים:

(א)  $(X, d)$  מ"מ שלם.

(ב) לכל סדרה יורדת  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  -  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

של קבוצות סגורות כך ש-  $\text{diam}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  מתקיים -

$$\{c\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$



**משפט:** כל מרחב מטרי  $(X, d)$  קומפקטי הוא מ"מ שלם.

**הסבר:** (דרך קריטריון קנטור + קריטריון *FIP*)

נניח נתונה סדרה יורדת של קבוצות סגורות  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  -  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$   
כך ש  $\text{diam}(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  אז

$$\alpha = \{A_n\} \in \text{FIP}$$

$A_n$  סגור. לכן בגלל הקומפקטיות אכן  $\bigcap_{n \in I} A_n \neq \emptyset$ .

↓

$$\alpha \in \text{IP}$$

ואז מקריטריון קנטור נקבל המרחב הוא שלם.

■

**משפט (Heine – Borel):**

נניח  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . אזי התנאים הבאים שקולים:

$$1) X \in \text{Comp}$$

$$2) X \text{ חסום וסגור.}$$

**הוכחה:**

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

חסימות – כל מ"מ קומפקטי הוא חסום (הוכחנו יותר: ח"כ)

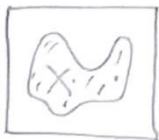
סגירות –  $\mathbb{R}^n \in T_2$ . נפעיל את משפט הסגירות.

$$(2) \Rightarrow (1)$$

נניח  $X$  חסום וסגור. קיימת קובייה  $K \subset \mathbb{R}^n$  כך ש  $X \subseteq K$

$$K = [a, b]^n \text{ בה"כ}$$

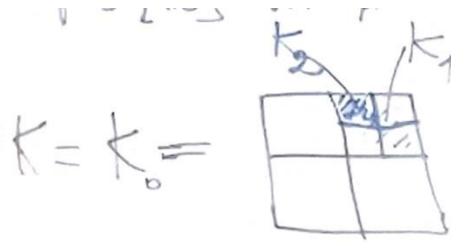
אז לפי *Tychonoff*, אכן  $K \in \text{Comp}$  (אם ידוע ש  $[a, b] \in \text{Comp}$ ).



K

דרך ב' (Cantor):

ניחה בשלילה ש-  $Comp \not\subset K$ .



ז"א יש כיסוי  $\alpha$  פתוח של  $K$  ללא תת כיסוי סופי. נחלק תתי קוביות (מספר  $= 2^n$ ) דרך החלוקה של הצלעות. נקרא לתת קובייה – "קובייה בעייתית" אם אין תת כיסוי סופי עבור הכיסוי הנ"ל. אז יש לפחות תת קובייה אחת בעייתית  $K_1$ .

באופן דומה נחלק לתתי קוביות ואז יש תת קובייה  $K_2 \subset K_1$  כך ש-  $K_2$  בעייתית.

אז נקבל –  $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$

סדרה יורדת של קוביות (סגורות לא ריקות).

$$\text{diam}(K_i) \rightarrow 0$$

$\mathbb{R}^n$  שלם, לכן לפי קריטריון קנטור: יש איבר משותף  $\{c\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$

$c \in K$ . לכן קיים איבר מסוים של הכיסוי  $\alpha$   $O_j$  כך ש-  $c \in O_j$

בגלל הפתיחות  $\exists r > 0: B_r(c) \subset O_j$

לכן –  $\exists m \in \mathbb{N}: c \in K_m \subset B_r(c) \subset O_j$

קיבלנו ש  $K_m$  מכוסה ע"י איבר אחד  $O_j$  של הכיסוי.

לכן  $K_m$  לא בעייתית בסתירה לבנייה!



**הערה:** משפט *Heine – Borel* בד"כ לא נכון אם מחליפים  $\mathbb{R}^n$  במרחבים מטריים או נורמיים אחרים.

**דוגמה:** (כבר דיברנו על זה)

במרחב הילברט  $l_2$  יש תת קבוצה חסומה וסגורה לא קומפקטית.

למשל:  $A := \{e_1, e_2, \dots\} \subset l_2$  (דיסקרטי אינסופי לכן לא קומפקטי).

משפט (קומפקטיות במרחב מטרי): נניח  $(X, d)$  מ"מ. התנאים הבאים שקולים:

$$1) X = (X, top(d)) \in Comp$$

$$2) X \in SComp \text{ (לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת).}$$

$$3) X \in BW \text{ (תכונת Bolzano-Weierstrass לכל קבוצה אינסופית ב- } X \text{ יש נקודת הצטברות).}$$

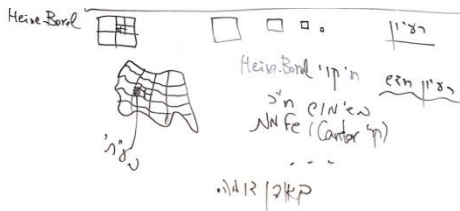
$$4) (X, d) \text{ שלם וחסום כליל.}$$

הוכחה:

$$(1) \leftarrow (4)$$

דומה למשפט Heine – Borel

(נדלג על הוכחה מפורשת)



$$(1) \leftarrow (2)$$

נניח בשלילה שלא, כלומר  $X \notin SComp$

זאת אומרת, קיימת סדרה  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ללא ת"ס מתכנסת ב-  $X$ .

נגדיר -  $\emptyset \neq A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

ברור  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  לכן  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in FIP$ .

הערה:  $A_n$  סגורות. זה נובע מ-

$$1) \text{ במ"מ ידוע ש- } cl(A) = scl(A)$$

2) פרמוטציה של סדרה לא משפיעה על ההתכנסות (או אי התכנסות)

(כאשר אנו משתמשים בהגדרת התכנסות דרך - בכל כדור של הגבול יש כמעט כל האיברים).

$$\{X \in Comp \mid FIP \ni \{A_n\}\} \Rightarrow \{A_n\} \in IP \text{ - כעת}$$

זה גורר שקיימת נקודה  $c \in \bigcap A_n \neq \emptyset$

לכן קיימת תת סדרה קבועה  $c, c, \dots$  של הסדרה  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  (בסתירה להנחה שאין ת"ס מתכנסת).

$$(2) \leftarrow (3)$$

נניח  $A \subseteq X$  אינסופית. צ"ל  $A' \neq \emptyset$

בגלל אינסופיות קיימת סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ב-  $A$  עם איברים שונים.

$X \in SComp \Leftrightarrow$  קיימת תת סדרה  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  שמתכנסת ב  $X$ .

$$a_{n_k} \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = b$$

$\Downarrow$

$$b \in A'$$

$\Downarrow$

$$A' \neq \emptyset$$

(2)  $\Leftarrow$  (3)

נניח  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרה ב  $X$ . נוכיח שיש ת"ס מתכנסת.

נגדיר –  $X \supset A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  (תמונה של הסדרה).

אם  $A$  סופית אז יש איבר בסדרה שחוזר אינסוף פעם ואז יש תת סדרה קבועה (מתכנסת!).

אם  $A$  אינסופית אז לפי הנתון (3)  $X \in BW$ .

אז קיימת נקודת הצטברות  $z \in A'$ .

(\*) אז קיימת סדרה עם איברים שונים ב  $A$  ששואפת ל  $z$ .

ע"פ אותה הערה על הפרמוטציות...

בה"כ ניתן להניח שיש תת סדרה של  $\{x_n\}$  המקיימת את (\*).

לכן קיבלנו ת"ס מתכנסת!

(2)  $\Leftarrow$  (4)

• קודם כל נוכיח שלמות של  $(X, d)$

נניח  $\{x_n\}$  סדרת קושי. צ"ל שהיא מתכנסת.

תכונה (2)  $\Leftarrow$  יש תת סדרה  $\{x_{n_k}\}$  שמתכנסת ב  $X$ .

תכונה  $m_3$  של מרחבים מטריים  $\Leftarrow$  אם לסדרת קושי יש ת"ס מתכנסת, אז גם הסדרה מתכנסת.

• כעת נוכיח ש  $(X, d)$  ח"כ.

צ"ל שלכל  $\varepsilon > 0$  יש תת קבוצה סופית שהיא  $\varepsilon$  – צפופה (רשת).

נניח בשלילה שקיים  $0 < \varepsilon_0$  כך שאין  $\varepsilon_0$  – רשת. בונים סדרה ללא ת"ס מתכנסת:

ניקח  $x_1 \in X$  אז  $X \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$  (אחרת  $\{x_1\}$  - רשת ב  $(X, d)$ ).

ניקח  $x_2 \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$  אז מתקיים  $B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2) \neq X$

אחרת  $\{x_1, x_2\}$  - רשת  $\varepsilon_0$  (שימו לב:  $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$ ).

נמשיך כך... נקבל סדרה  $x_1, x_2, x_3, \dots$

$$\forall i \neq j: d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$$

אז ברור שאף ת"ס של  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  לא ס"ק.

זה גורר שלסדרה הנ"ל אין ת"ס מתכנסת!



Tychonoff Theorem (1935) משפט טיכונוף

נניח  $X = \prod_{i \in I} X_i$  מכפלה טופולוגית. אזי  $X$  קומפקטי אם ורק אם כל  $X_i$  הוא מרחב קומפקטי.

הוכחה:

(כוון אחד)

אם  $X$  קומפקטי אז כל  $X_i$  היא גם קומפקטי כתמונה רציפה של  $X$  לגבי העתקת ההטלה:  $p_i: X \rightarrow X_i$ .

(כוון שני)

נוכיח בשתי דרכים:

דרך א. בעזרת קריטריון קומפקטיות Alexander (דרך תת בסיס).

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות דרך FIP (תכונת החיתוך הסופי).

קריטריון קומפקטיות Alexander:

נניח  $X$  מרחב טופולוגי ו  $\beta$  תת בסיס (פרא-בסיס) של הטופולוגיה. אזי  $X$  קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי  $C \subset \beta$  של  $X$  (דרך איברים של  $\beta$ ) קיים תת כיסוי סופי.

הוכחה של הקריטריון: (נדלג)

כיוון אחד ברור (הגדרה של הקומפקטיות).

כיוון שני: נניח מ"ט  $X$  ותת בסיס שלו  $\beta$  מקיימים את התנאי של Alexander.

צ"ל ש  $X$  קומפקטי. נניח בשלילה שלא. אז קיים כיסוי פתוח  $C$  של  $X$  ללא תת כיסוי סופי.

נקרא לכיסוי פתוח "בעייתי" אם אין תת כיסוי סופי.

בה"כ ניתן להניח ש  $C$  הוא כיסוי בעייתי מכסימלי.

הערה: מכסימליות פירושה הדבר – אין גדול ממנו (ולא בהכרח הכי גדול) ז"א כל כיסוי פתוח של  $X$  המכיל את  $C$  ושונה ממנו הוא לא בעייתי.

הסבר: על מנת להוכיח הקיום של כיסוי כזה נשתמש בלמה של צורן.

שימו לב שאם נתון שרשרת של כיסויים בעייתיים אזי האיחוד הוא גם בעייתי.

בגלל המכסימליות של  $C$  הוא מקיים את התכונה הבאה:

(\* ) אם  $O$  קבוצה פתוחה שלא שייכת ל  $C$  אז  $C \cup \{O\}$  לא בעייתי ולכן קיים תת אוסף סופי  $C_0$

של  $C$  כך ש  $C_0 \cup \{O\}$  מכסה את  $X$ .

האוסף  $C \cap \beta$  הוא לא מכסה את  $X$

(אחרת תנאי של Alexander גורר ש  $C$  לא בעייתי).

לכן קיימת נקודה  $z \in X$  כך ש  $z$  לא מכוסה ע"י  $C \cap \beta$ .

קיים  $U \in C$  כך ש  $z \in U$  (כי  $C$  כיסוי).

לפי הגדרת תת בסיס ( $\beta^c$  הוא בסיס) קיימים מספר סופי של איברים

$$z \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subset U \text{ כך ש } S_1, \dots, S_n \in \beta$$

אף  $S_1, \dots, S_n$  לא שייך ל  $C$  (כי אחרת  $C \cap \beta$  מכסה את  $z$ ).

לכן ע"פ תכונת (\*) הנ"ל לכל  $1 \leq i \leq n$  קיים תת אוסף סופי  $C_i$  כך ש  $C_i \cup \{S_i\}$  מכסה את  $X$ .

נסמן:  $G_i := \cup \{A : A \in C_i\}$ . אז  $S_i \cup G_i = X$  ונקבל

$$U \cup \left( \bigcup_{i=1}^n G_i \right) \supseteq \left( \bigcap_{i=1}^n S_i \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^n G_i \right) \supseteq \bigcap_{i=1}^n (S_i \cup G_i) = X$$

ז"א תת אוסף סופי  $\bigcup_{i=1}^n C_i \cup \{U\}$  של  $C$  מכסה את  $X$ . סתירה! זה מוכיח את הקריטריון.

### בעזרתו נוכיח כיוון שני של משפט Tychonoff

בתפקיד של פרא-בסיס  $\beta$  ב  $X = \prod_{i \in I} X_i$  ניקח תיבות אלמנטריות.

$\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$  פרא-בסיס סטנדרטי. המקורות של קבוצות פתוחות מכל גורם

$X_i$ . נניח בשלילה ש  $X$  לא קומפקטי. אז לפי קריטריון Alexander קיים תת אוסף  $C$  של

$\alpha$  כך ש  $C$  הוא כיסוי בעייתי (ללא תת כיסוי סופי) של  $X$ . נציג אותו  $C = \bigcup_{i \in I} C_i$  כאשר

כל  $C_i$  מורכב מתיבות אלמנטריות שבאות מגורם  $X_i$ . לפי ההנחה  $C_i$  לא מכיל תת כיסוי

סופי של  $X$ . אזי  $p_i(C_i)$  לא מכיל תת כיסוי סופי של  $X_i$ .



אבל  $X_i$  קומפקטי ו- $p_i(C_i)$  אוסף של קבוצות פתוחות. לכן  $p_i(C_i)$  הוא לא כיסוי של  $X_i$  קיימת נקודה  $x_i \in X_i$  שלא מכוסה ע"י  $p_i(C_i)$ . אזי הנקודה  $x := (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$  לא מכוסה ע"י (כיסוי)  $C$  של  $X$ . סתירה! מכאן מש"ל.



### הערה:

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות FIP (תכונת החיתוך הסופי)

דרך ג. ואולטרה-פילטרים (על-מסנן). טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה (ד. לייבוויץ).

[https://en.wikipedia.org/wiki/Tychonoff%27s\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Tychonoff%27s_theorem)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Compact\\_space](https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_space)

### תוצאות:

- $[0,1]^S \in Comp$  קובית Tychonoff (לכל קבוצה  $S$ )
- $[0,1]^{\mathbb{N}} \in Comp$  קובית Hilbert
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \in Comp$  קובית Cantor

דוגמה (מרחב קנטור)

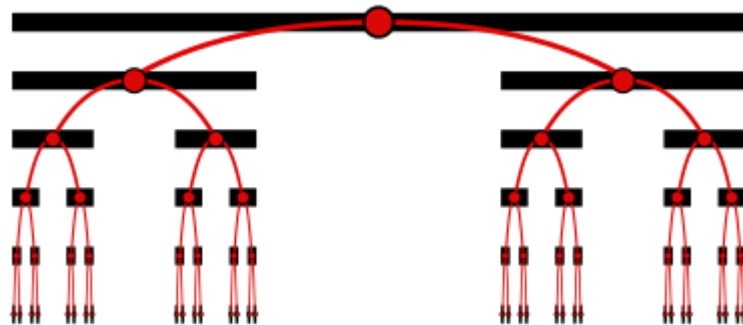
תזכורת: ידוע שקבוצת קנטור היא  $C := \{c \in [0,1] : c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} \quad c_i \in \{0,2\}\}$

חיתוך של קבוצות סגורות  $C = \bigcap_n C_n \quad C_0 = [0,1], C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1})$



משפט: קבוצת קנטור  $C$  הומואומורפי עם מרחב מכפלה  $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$

הוכחה: ש"ל  $C \simeq \{0,2\}^{\mathbb{N}}$



נגדיר פונקציה  $f : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow C \quad f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$

אזי  $f$  חח"ע (יחידות ההצגה הנ"ל). גם פונקציה על (ברור).

$\{0,2\}^{\mathbb{N}}$  קומפקטי לפי משפט Tychonoff.

לכן בגלל משפט על ההומואומורפיזם מ"ל  $f$  רציפה בכל נקודה

$$a = (a_1, a_2, \dots) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$$

מ"ל לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת סביבה  $O \in N(a)$  כך ש

$$x \in O \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

נבחר  $n_0 \in \mathbb{N}$  כך ש  $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$  ונגדיר תיבה בסיסית

$$O := \{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_{n_0}\} \times \{0,2\} \times \{0,2\} \times \cdots$$

אז ברור  $O \in N(a)$  ולכל  $x = (a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots) \in O$  מתקיים:

$$|f(x) - f(a)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \right| = \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$$

■

תרגיל: הוכיחו ש:

א.  $C^2 \simeq C, C^n \simeq C, C^{\mathbb{N}} \simeq C^{\mathbb{Z}} \simeq C$ .

ב. \*  $C$  הומוגני.

מידע נוסף על קבוצת קנטור (Cantor set everywhere):

- כל מרחב קומפקטי מטריזבילי הוא תמונה רציפה של קבוצת קנטור.
- למשל:  $f: C \rightarrow [0,1]$   $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2} \cdot \frac{1}{2^i}$  ( $x_i \in \{0,2\}$ ) (מדוע היא לא חח"ע?)
- כל מרחב מטריזבילי בעל מימד אפס ללא נקודות מבודדות הומיאומורפי עם קבוצת קנטור.
- מרחב קנטור  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  חשוב גם באינפורמטיקה, תורת הקודים, במערכות דינמיות סמבוליות ...  
<https://peerj.com/articles/cs-171.pdf>
- "shift homeomorphism  $\sigma: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma(x_i) = (x_{i+1})$   
(תבדקו שיש מסלול צפוף לפעולת חבורה ציקלית  $G = \langle \sigma \rangle = \{\sigma^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  על  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ )
- ראו גם: [https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set)