

שעת קבלה לפני מבחן

9 בפברואר 2021

שאלות:

1. n אנשים מתיישבים ליד שולחן עגול, ואז קמים ומתיישבים מחדש. בכמה מקרים לכל אדם מתקיים: שכניו מימין ומשמאל שונים?
פתרון: נסמן את האנשים במספרים $1, \dots, n$, כאשר הם מסודרים מאיש 1 ומכאן ימינה. ונחשב את המקרים "הפסולים", בעזרת הכלה והדחה.
נסמן: A_i קבוצת הישיבות בהן $i, i+1$ יושבים כמקודם. המקרה של השכן משמאל של i , נכלל בקבוצה A_{i-1} כי i הוא השכן מימין של $i-1$. נשים לב, שקבוצת הישיבות הפסולות היא בדיוק

$$\bigcup_{i=1}^n A_i$$

כי בישיבה פסולה, יש לפחות אדם אחד שמיימינו נמצא השכן מימינו הקודם. כדי לחשב את האיחוד נחשב את גדלי החיתוכים:

$$|A_i| = (n-2)!$$

הסבר: הזוג שיושב כמקודם נחשבים אדם אחד, ואז צריך לסדר במעגל $n-1$ אנשים, שזה $(n-2)!$.

$$|A_i \cap A_j| = (n-3)!$$

הסבר: בין אם הם עוקביים ואז מדובר בשלושה שיושבת כמקודם, ובין אם לא ואז מדובר בשני זוגות שונים שיושבים כמקודם, נקבל שצריך לסדר $n-2$ במעגל, ולכן נקבל $(n-3)!$.

באותו אופן נקבל שלכל $1 \leq k \leq n-1$, הגודל של חיתוך k קבוצות הוא:

$$(n-k-1)!$$

כי אנחנו צריכים לסדר במעגל $(n-k)$ אנשים.

עבור חיתוך כל הקבוצות - זה פשוט אומר לשבת כמקודם, ולכן נקבל 1 (הערה: זה

בדיוק מה שמקבלים עבור $k = n - 1$. נחשב את "העולם": צריך לסדר n אנשים במעגל, ולכן זה $(n - 1)!$, ונקבל שהתשובה היא:

$$(n-1)! - \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k-1)! + (-1)^{n+1} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k-1)! + (-1)^n$$

2. משפט החתונה: בהינתן גרף דו"צ $G = (R, L, E)$ אז יש שידוך מושלם אם"ם לכל $S \subset R$ מתקיים: $|S| \leq |\Gamma(S)|$. כלומר, לכל תת קבוצה של קודקודים בצד הימני, מספר השכנים שלהם הוא לפחות כמספרם.

$$f(0) = \frac{8}{9}, f(1) = -\frac{7}{9}, f(n) = -2f(n-1) - f(n-2) + 2^{n-2} \quad 3.$$

פתרון:

$$f(0) = \frac{8}{9}, f(1) = -\frac{7}{9} = f(0) - \frac{15}{9}$$

$$f(2) = -2 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) - \frac{8}{9} + 1 = \frac{15}{9}$$

$$f(3) = -\frac{5}{9}$$

4.

(א) n קבוצות זוגי, $\frac{n}{2}$ משחקים בכל מחזור. ניתן לקיים $n - 1$ מחזורים כך שכל 2 קבוצות משחקות אחת מול השנייה בדיוק פעם אחת. פתרון: נראה שהטורניר נותן לנו בנייה של הגרף המלא K_n . בכל מחזור יש לנו $\frac{n}{2}$ צלעות חדשות. בסה"כ מקבלים שמספר הצלעות בגרף הוא $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ שזה מספר הצלעות ב- K_n . ניקח את הגרף המלא. נתבונן בחלוקה לזוגות ונשמיט את הצלעות מהגרף. לכל קודקוד השמטנו בדיוק צלע אחת ולכן דרגתו היא $n - 2$. כך נעשה זאת גם בשלב.

(ב) n כעת א"ז. ניתן להפגיש כל 2 קבוצות תוך n מחזורים. במחזור $\frac{n-1}{2}$.