

מבוא לטופולוגיה – תרגיל 3

שאלה 1

נסמן ב- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת מספרים ממשיים שאיבר ה- n שלה הוא מספר x_n .
תהי l_∞ קבוצה של כל הסדרות הממשיות החסומות, ז"א,

$$l_\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

א' תוכיחו שפונקציה $d: l_\infty \times l_\infty \rightarrow [0, \infty)$ כאשר

$$d_\infty((x_n), (y_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

מהווה מטריקה על l_∞ .

ב' תוכיחו שתתקבוצה $l_\infty \supseteq F$ כאשר:

$$F = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty \mid \{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq 0\} \text{ סופית}\}$$

היא תתקבוצה לא סגורה במ"מ (l_∞, d_∞) .

שאלה 2

א' יהיו M_1, M_2 מרחבים מטריים. תהי פונקציה $f: M_1 \rightarrow M_2$ רציפה ו- $M_2 \supseteq F$ קבוצה סגורה. תוכיחו שהקבוצה $M_1 \supseteq f^{-1}(F)$ סגורה.
ב' תוכיחו שהקבוצה $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ סגורה במרחב אוקלידי \mathbb{R}^2 .

שאלה 3

תוכיחו שהמרחב המטרי (M, d_{0-1}) קומפקטי אם ורק אם M קבוצה סופית.

שאלה 4

א' תוכיחו שאם $M \supseteq A$ תתקבוצה סגורה במ"מ M קומפקטי, אז תתמרכב A הוא מ"מ קומפקטי.

ב' תוכיחו שאם תתקבוצה $U \neq \emptyset$ פתוחה במרחב אוקלידי \mathbb{R}^n אז תתמרחב U אינו קומפקטי.

שאלה 5.

יהיו ρ_1, ρ_2 שתי מטריקות שקולות על M .
תוכיחו: (M, ρ_1) קומפקטי $\Leftrightarrow (M, \rho_2)$ קומפקטי.