

ליניארית 2 - סיכום

מאת: הלל בן חנוך

הערות בנוגע לסימון ולמבנה

במסמך זה נעשה שימוש במונחים מתמטיים מוגדרים היטב, תוך שמירה על הבחנה ברורה בין הגדרות פורמליות, טענות מתמטיות ומשפטים מרכזיים. להלן סיווגם:

הגדרה: מושג או אובייקט מתמטי המוגדר באופן חד-משמעי בהתאם למסגרת התאורטית בה הוא נבחן. הגדרות מהוות את היסודות לבניית תאוריות מתמטיות ומאפשרות ניתוח מדויק של מושגים מופשטים.

טענה: קביעה מתמטית אשר ניתנת להוכחה או שכבר הוכחה, אך אינה נחשבת למשפט מרכזי בתאוריה. טענות עשויות להיות תוצאות ביניים בהוכחת משפטים או קביעות הנובעות ישירות מהגדרות וממשפטים קודמים.

משפט: תוצאה מתמטית משמעותית בעלת השפעה רחבה על התאוריה הנדונה. משפטים מבוססים על הוכחות לוגיות מוצקות ונחשבים לאבני יסוד בתחום המתמטי בו הם מתקיימים.

הבהרה חשובה

סיכום זה נועד לשמש ככלי עזר להבהרת מושגי יסוד ולרענון ידע קיים. המידע המופיע במסמך מניח היכרות מוקדמת עם החומר הנלמד ואינו מהווה תחליף ללימוד מעמיק מתוך מקורות אקדמיים מוסמכים. התוכן נבדק בקפידה, אך תיתכנה טעויות, חוסרים או אי-דיוקים. במידה ויתגלו אי-התאמות או שגיאות, הערות והצעות לשיפור יתקבלו בברכה.

תוכן עניינים

1	תזכורות מליניארית 1	4
2	תכונות הדטרמיננטה	5
3	תמורות וסימן תמורה	5
3.1	הגדרות	5
3.2	הגדרת הדטרמיננטה באמצעות תמורות	6
4	המטריצה הנלווית	6
4.1	הגדרה	6
4.2	טענה על מטריצה נלווית	6
5	ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים	6
5.1	הגדרות	6
5.2	סדר פעולות למציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים	7
5.3	מושגים נוספים	7
6	דמיון מטריצות ולכסינות	7
6.1	הגדרה	7
6.2	תכונות של מטריצות דומות	8
6.3	לכסינות	9
6.4	מ"ל	9
6.5	תנאים ללכסינות מטריצה	9
6.6	לכסון אורתוגונלי (מעל $\mathbb{R}$)	9
6.7	מושגים נוספים	10
6.8	קשר בין ריבוי אלגברי וגאומטרי	10
7	מטריצה נילפוטנטית	11
8	מכפלה פנימית ונורמה	11
8.1	הגדרה: מכפלה פנימית	11
8.2	המכפלות הפנימיות הסטנדרטיות	11
8.3	נורמה	12
8.4	משפט אי שוויון קושי-שוורץ	12
8.5	אורתוגונליות, אורתונורמליות ומטריקה	12
8.6	קואורדינטות בבסיס אורתוגונלי ואורתונורמלי	13
8.7	משפט פיתגורס המוכלל	13
8.8	היטל	13
8.9	הטלת וקטור על תת-מרחב	13
8.10	אלגוריתם גרס-שמידט	14
9	המרחב הניצב	14

14	הגדרה	9.1	
14	טענות על המרחב הניצב	9.2	
15	משפט הפירוק הניצב	9.3	
15	אופרטורים נורמליים, הרמיטיים ואוניטריים	10	
15	האופרטור הצמוד	10.1	
15	טענות על האופרטור הצמוד	10.2	
16	סוגי אופרטורים	10.3	
16	לכסינות אוניטרית	10.4	
17	משפט ז'ורדן וצורת ז'ורדן	11	
17	תכונות של מטריצת ז'ורדן	11.1	
17	אלגוריתם לקביעת צורות ז'ורדן מתוך הפולינום המינימלי	12	
18	ניסוח המשפט	12.1	
19	האלגוריתם לזרדון מטריצה	13	
20	תבניות בילינאריות ומטריצות חיוביות לחלוטין	14	
20	תבנית בי לינארית	14.1	
20	מטריצה חיובית לחלוטין (ממשית סימטרית)	14.2	
20	מטריצה חיובית לחלוטין (הרמיטית)	14.3	
20	קריטריון סילבסטר	14.4	
20	צורות גיאומטריות מתבניות בילינאריות	14.5	
21	מקרים מנוונים - משוואות קנוניות	14.6	
21	מדריך למציאת זווית סיבוב ושיקוף (בצורות ריבועיות)	14.7	

1 תזכורות מליניארית 1

- **צירוף לינארי:** צירוף לינארי של וקטורים $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ במרחב וקטורי V הוא ביטוי מהצורה:

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k$$

כאשר $c_1, \dots, c_k$ סקלרים מהשדה F .

- **פרישה:** נאמר שקבוצת וקטורים $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ פורשת את המרחב הוקטורי V אם כל וקטור $\vec{v} \in V$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של וקטורים מ- S . במקרה זה, מרחב הפרישה של S הוא כל V , ונסמן:

$$\text{span}(S) = \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = V$$

- **תלות לינארית ואי תלות לינארית:**

– **תלות לינארית:** קבוצת וקטורים $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ נקראת תלויה לינארית אם קיימים סקלרים $c_1, \dots, c_k$ לא כולם אפס, כך ש:

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

– **אי תלות לינארית:** קבוצת וקטורים $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ נקראת בלתי תלויה לינארית אם היא אינה תלויה לינארית. כלומר, אם השוויון

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

מתקיים רק כאשר $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

- **בסיס:** בסיס למרחב וקטורי V הוא קבוצת וקטורים $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ מ- V כך ש:

1. B פורשת את V .

2. B בלתי תלויה לינארית.

- **מרחב האפס (גרעין) של מטריצה:** עבור מטריצה $A \in F^{m \times n}$, מרחב האפס (או הגרעין) של A הוא קבוצת כל הוקטורים $\vec{x} \in F^n$ אשר פתרון למערכת המשוואות ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$. מסומן כ- $N(A)$ או $\ker(A)$.

$$N(A) = \{\vec{x} \in F^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

כדי למצוא את מרחב האפס של מטריצה A :

1. דרג את המטריצה A לצורה מדורגת קנונית R .
2. פתור את מערכת המשוואות $R\vec{x} = \vec{0}$ על ידי ביטוי המשתנים התלויים באמצעות המשתנים החופשיים.
3. כתוב את הפתרון הכללי בצורה וקטורית. הוקטורים המתקבלים מהצורה הוקטורית מהווים בסיס למרחב האפס $N(A)$.

- **משפט הדרגה:** למטריצות:
עבור מטריצה $A \in F^{m \times n}$

$$\dim N(A) + \text{rank}(A) = n$$

להעתקות לינאריות:

עבור העתקה לינארית $T \in \text{Hom}(V, W)$

$$\dim \ker(T) + \dim(\text{Im } T) = \dim V$$

- **מטריצה מייצגת:**

1. נפעיל את ההעתקה על איברי בסיס התחום.
2. נמצא קואורדינטות לפי בסיס הטווח.
3. נשים את הקואורדינטות בעמודות המטריצה.

2 תכונות הדטרמיננטה

- **דטרמיננטה אפס:** $\det(A) = 0_F$ אם ורק אם A אינה הפיכה.
- **פיתוח הדטרמיננטה לפי שורה:** תהי $A \in F^{n \times n}$ ויהי $1 \leq i \leq n$:
$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- **תהיינה** $A, B, C \in F^{n \times n}$ ויהי $1 \leq i \leq n$ **כך ש:**

$$R_j(A) = R_j(B) = R_j(C) \text{ כי } j \neq i \text{ מתקיים כי}$$

$$R_i(C) = R_i(A) + R_i(B)$$

אז:

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

- **פעולות דירוג:**

– אם B התקבלה מ- A ע"י פעולת הדירוג $R_i \leftarrow R_i + aR_j$ כאשר $i \neq j$ אזי:
$$\det(B) = \det(A)$$

– אם B התקבלה מ- A ע"י פעולת הדירוג $R_i \leftrightarrow R_j$ כאשר $i \neq j$ אזי:
$$\det(B) = -\det(A)$$

– אם B התקבלה מ- A ע"י פעולת הדירוג aR_i אזי:
$$\det(B) = a \cdot \det(A)$$

3 תמורות וסימן תמורה

3.1 הגדרות

- **קבוצת התמורות S_n :** יהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר את S_n קבוצת התמורות, להיות אוסף כל הפונקציות ההפיכות מהקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ לעצמה.
- **סימן של תמורה:** תהי $f \in S_n$. נגדיר את סימן התמורה $\text{sign}(f)$ על ידי:

$$\text{sign}(f) = \prod_{i < j} \frac{f(j) - f(i)}{j - i}$$

- **מחזור:** יהיו $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ שונים. נגדיר את המחזור $f = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k) \in S_n$ על ידי:

$$f(x) = \begin{cases} a_{i+1} & x = a_i, \quad i < k \\ a_1 & x = a_k \\ x & x \neq a_i \end{cases}$$

3.2 הגדרת הדטרמיננטה באמצעות תמורות

יהי $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n$, ויהי שדה F ותהי $A \in F^{n \times n}$. נגדיר את הדטרמיננטה של A על ידי:

$$\det(A) = \sum_{f \in S_n} \text{sign}(f) \cdot \prod_{i=1}^n [A]_{i, f(i)}$$

4 המטריצה הנלווית

4.1 הגדרה

תהי $A \in F^{n \times n}$. נגדיר את המטריצה הנלווית $\text{adj}(A) \in F^{n \times n}$ על ידי:

$$[\text{adj}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

4.2 טענה על מטריצה נלווית

תהי A ריבועית אז

$$A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I$$

מסקנה: אם A הפיכה, אז $\det(A) \neq 0$ ונקבל:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

5 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

5.1 הגדרות

- **וקטור עצמי וערך עצמי:** תהי $A \in F^{n \times n}$ ויהי $\vec{v} \in F^n$. אם $\vec{v} \neq \vec{0}$ וקיים $\lambda \in F$ כך ש- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, אזי $\vec{v}$ נקרא וקטור עצמי של A עם הערך העצמי λ .
- **ביותר פורמליות:** תהי $A \in F^{n \times n}$ אזי $\lambda \in F$ ע"ע של A אם ורק אם

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

ובנוסף ראינו בתרגול ש λ הוא ערך עצמי של A אם"מ קיים $v \neq 0$ ש $Av = \lambda v$ אם"מ קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת $(A - \lambda I)v = 0$ אם"מ $(A - \lambda I)$ לא הפיכה אם"מ $|A - \lambda I| = 0$

- **מרחב עצמי:** תהי $A \in F^{n \times n}$ ויהי $\lambda \in F$ ע"ע של A אזי המרחב העצמי של A המתאים לערך העצמי λ הוא

$$V_\lambda(A) = N(\lambda I - A)$$

- **פולינום אופייני:** תהי $A \in F^{n \times n}$. נגדיר את הפולינום האופייני של A להיות:

$$p_A(x) = \det(xI - A)$$

- **עובדה:** (לכל פולינום, לאו דווקא אופייני)

– לפולינום ממשי ממעלה זוגית לא חייב להיות שורש ממשי.

– לפולינום ממשי ממעלה אי זוגית כן חייב להיות שורש ממשי.

- **עובדה:** λ ערך עצמי של A אם ורק אם $P_A(\lambda) = 0$
- **מסקנה:** תהי $A \in F^{n \times n}$ מטריצה בעלת ערכים עצמיים שונים (לכן כל אחד מהם הוא עם ריבוי אלגברי 1), אזי הוקטורים העצמיים המתאימים $v_1, \dots, v_n$ מהווים בסיס למרחב F^n

5.2 סדר פעולות למציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

1. חשבו את הפולינום האופייני $p_A(x) = \det(xI - A)$.
2. מצאו את השורשים של $p_A(x)$. שורשים אלו הם הערכים העצמיים של המטריצה.
3. לכל ערך עצמי λ , חשבו בסיס למרחב העצמי $V_\lambda(A) = N(\lambda I - A)$.

5.3 מושגים נוספים

- **ריבוי אלגברי:** הריבוי האלגברי של ערך עצמי λ מוגדר להיות החזקה של $(x - \lambda)$ בפולינום האופייני, בנוסף, לכל ערך עצמי הריבוי אלגברי גדול שווה מהריבוי הגאומטרי שלו.
- **ריבוי גאומטרי:** הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי λ מוגדר להיות $\dim(V_\lambda)$.
- **בלוק ז'ורדן:** בלוק ז'ורדן הוא מטריצה מהצורה:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in F^{k \times k}$$

6 דמיון מטריצות ולכסינות

6.1 הגדרה

תהינה $A, B \in F^{n \times n}$. אומרים כי A דומה ל- B אם קיימת P הפיכה כך ש:

$$A = P^{-1}BP$$

6.2 תכונות של מטריצות דומות

- מטריצות דומות אם ורק אם הן מייצגות את אותה ההעתקה.
- למטריצות דומות יש את אותה העקבה.
- למטריצות דומות יש אותה דרגה.
- למטריצות דומות יש את אותו פולינום אופייני.
- למטריצות דומות יש את אותה הדטרמיננטה.
- למטריצות דומות יש אותו ריבוי אלגברי ואותו ריבוי גאומטרי.
- v וקטור עצמי של A אמ"מ $P^{-1}v$ הוא וקטור עצמי של B .

6.3 לכסינות

הגדרה עבור מטריצות:

מטריצה ריבועית $A \in F^{n \times n}$ נקראת **לכסינה** אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש:

$$A = P^{-1}DP$$

או באופן שקול:

$$D = PAP^{-1}$$

כאשר D היא מטריצה אלכסונית (כלומר, כל איבריה מחוץ לאלכסון הראשי הם אפסים).

במילים אחרות, **מטריצה לכסינה היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית**.

הגדרה שקולה עבור אופרטורים:

אופרטור $T : V \rightarrow V$ מעל מרחב וקטורי V **לכסין** אם קיימת לו **מטריצה מייצגת אלכסונית** בבסיס מתאים.

אם T לכסין, אז קיים בסיס של V שבו מטריצת ההצגה של T היא מטריצה אלכסונית.

בנוסף:

• $A \in F^{n \times n}$ היא לכסינה אם"מ קיים F^n בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A .

6.4 מל"ל

הגדרה:

יהי פולינום $p(x) \in F[x]$ אומרים ש- $p(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, או בקיצור מל"ל אם $p(x)$ ניתן להצגה כמכפלה של גורמים לינאריים. **הגדרה:** שדה נקרא סגור אלגברית אם כל פולינום בו הוא מל"ל

6.5 תנאים ללכסינות מטריצה

תהי $A \in F^{n \times n}$. אזי A לכסינה אם ורק אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

1. הפולינום האופייני שלה מל"ל.
2. לכל ערך עצמי של A מתקיים כי הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי.

6.6 לכסון אורתוגונלי (מעל $\mathbb{R}$)

A לכסינה אורתוגונלית אם ורק אם היא סימטרית
אלגוריתם:

- מצא את הע"ע של המטריצה A .
- מצא בסיסים אורתונורמליים למרחבים העצמיים של המטריצה A .
- מצא בסיסים למרחבים העצמיים של המטריצה A .
- הפעל גרס-שמידט על מנת להפוך כל אחד מהבסיסים האלו (בנפרד) לאורתונורמלי.
- שים את כל הווקטורים מכל הבסיסים בעמודות מטריצה P , היא בהכרח תהיה אורתוגונלית.
- מתקיים כי $P^t AP = D$, הינה מטריצה אלכסונית.

6.7 מושגים נוספים

- **מסלול:** יהי אופרטור T ויהי וקטור $\vec{v}$ כך ש- $(T - \lambda I)^{k-1} \vec{v}$ הוא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ . אזי סדרת הווקטורים הבאה נקראת מסלול:

$$(T - \lambda I)^{k-1} \vec{v}, \dots, (T - \lambda I) \vec{v}, \vec{v}$$

מסלול הוא בהכרח בת"ל.

- **מרחב עצמי מוכלל:** יהי אופרטור $T : V \rightarrow V$ כך ש- $\dim V = n$, ויהי λ ע"ע של T . נגדיר את המרחב העצמי המוכלל להיות:

$$K_\lambda(T) = \ker((T - \lambda I)^n)$$

- **תת מרחב T -אינווריאנטי:** יהי אופרטור $T : V \rightarrow V$ ויהי $U \leq V$ תת מרחב. אומרים כי U תת מרחב T -אינווריאנטי אם $T[U] \subseteq U$. כלומר, לכל וקטור $\vec{x} \in U$ מתקיים $T\vec{x} \in U$.
- **פולינום מינימלי:** הפולינום המינימלי של מטריצה $A \in F^{n \times n}$ הוא הפולינום בעל המעלה הנמוכה ביותר שמאפס את A , כלומר הפולינום $m_A(x)$ המקיים:

$$m_A(A) = 0$$

כלומר, כאשר מציבים את A בפולינום, מתקבלת מטריצת האפס.

- **הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני**, כלומר כל שורש של הפולינום המינימלי הוא ערך עצמי של A .
- **לכל ערך עצמי λ של A , הריבוי שלו בפולינום המינימלי הוא לפחות הריבוי הגאומטרי שלו** (אך לא בהכרח שווה לריבוי האלגברי).
- **שתי מטריצות דומות בעלות אותו פולינום מינימלי**, כלומר הפולינום המינימלי אינו משתנה תחת מעבר בסיס.
- **אם הפולינום המינימלי של A מתפרק לגורמים לינאריים שונים מעל השדה F , אזי A לכסינה.**

6.8 קשר בין ריבוי אלגברי וגאומטרי

יהי אופרטור T עם ע"ע λ עם ריבוי אלגברי r_A .

- אם T לכסין אזי $\dim(V_\lambda) = r_A$.
- אם T לא בהכרח לכסין אזי $\dim(V_\lambda) \leq r_A$.
- באופן כללי לגבי המרחב העצמי המוכלל: $\dim(K_\lambda) = r_A$.

7 מטריצה נילפוטנטית

- הגדרה: מטריצה A נקראת נילפוטנטית אם קיים k עבורו $A^k = 0$.
- משפט קיילי-המילטון: תהי $A \in F^{n \times n}$ אזי $p_A(A) = 0$.

8 מכפלה פנימית ונורמה

8.1 הגדרה: מכפלה פנימית

הגדרה: יהי V מ"ו מעל השדה $F = \mathbb{R}$ או $F = \mathbb{C}$, ותהי פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$ הפונקציה נקראת מכפלה פנימית אם מתקיימות 4 התכונות הבאות:

1. לינאריות ברכיב הראשון: לכל $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ מתקיים:

$$\langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$$

2. הומוגניות ברכיב הראשון: לכל $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ ולכל $c \in F$ מתקיים:

$$\langle c\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = c\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

3. הרמיטיות (סימטריה מצומדת): לכל $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ מתקיים:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \overline{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle}$$

4. חיוביות מוגדרת (אי-שליליות ומוגדרות): לכל $\vec{v} \in V$ מתקיים $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0_F$, ויש שוויון ל-0 אם ורק אם $\vec{v} = \vec{0}_V$.

8.2 המכפלות הפנימיות הסטנדרטיות

• עבור $V = \mathbb{R}^n$: אם נניח כי $\vec{v}, \vec{w}$ הם וקטורי עמודה, נגדיר:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^t \cdot \vec{w}$$

זה בעצם שווה לביטוי הבא:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

• עבור $V = \mathbb{C}^n$: נגדיר את המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^t \overline{\vec{w}}$$

זה נראה כך:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1 \ \dots \ x_n) \overline{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

• עבור מטריצות $F^{n \times n}$: נגדיר:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t \overline{B})$$

• עבור פונקציות רציפות $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

8.3 נורמה

• הגדרה: יהי V מ"ו מעל $F = \mathbb{C}$ או $F = \mathbb{R}$. תהי פונקציה $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, אזי הפונקציה נקראת נורמה אם מתקיימות 3 התכונות הבאות:

1. אי שליליות: לכל $\vec{v} \in V$ מתקיים $\|\vec{v}\| \geq 0$ ושיוויון לאפס אם ורק אם $\vec{v} = \vec{0}_V$.

2. הומוגניות: לכל $\vec{v} \in V$ ולכל $c \in F$ מתקיים $\|c\vec{v}\| = |c| \cdot \|\vec{v}\|$.

3. אי שוויון המשולש: לכל $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ מתקיים $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\|$.

• נורמה מושרית: יהי V מ"פ, נגדיר כי הפונקציה $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ נקראת הנורמה המושרית.

הגדרה: וקטור $v \in V$ יקרא מנורמל אם מתקיים $\|v\| = 1$, ניתן לנרמל כל וקטור על ידי חלוקה בנורמה שלו:

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

8.4 משפט אי שוויון קושי-שוורץ

משפט: יהי V ממ"פ ונביט בנורמה המושרית. אזי לכל $\vec{v}, \vec{w} \in V$ מתקיים:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

כאשר שוויון מתקיים אם ורק אם $\vec{v}, \vec{w}$ תלויים לינארית.

8.5 אורתוגונליות, אורתונורמליות ומטריקה

• **אורתוגונליות:** יהי V ממ"פ ויהיו $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$. נגדיר כי $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ (מאונך) אם $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$.

• **זווית בין וקטורים: הגדרה:** הזווית θ בין וקטורים u, v בממ"פ מוגדרת להיות:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

• **מטריקה סטנדרטית:** יהי V מרחב עם נורמה. נגדיר את המטריקה הסטנדרטית (מרחק בין שני וקטורים): לכל שני וקטורים $\vec{v}, \vec{w} \in V$ נגדיר כי $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$.

• **סדרה אורתוגונלית (א"ג):** יהי V ממ"פ ותהי סדרת וקטורים $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$. נאמר כי הסדרה אורתוגונלית אם לכל $i \neq j$ מתקיים $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$.

• **סדרה אורתונורמלית (א"נ):** יהי V מרחב מכפלה פנימית עם הנורמה המושרית, ותהי סדרת וקטורים $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. נגדיר כי הסדרה היא אורתונורמלית אם היא א"ג ובנוסף לכל i מתקיים $\|\vec{v}_i\| = \sqrt{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle} = 1$.

סדרה אורתונורמלית היא בהכרח בת"ל.

8.6 קואורדינטות בבסיס אורתוגונלי ואורתונורמלי

יהי V ממ"פ עם נורמה מושרית. ויהי $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ בסיס סדור א"ג למרחב אזי הקואורדינטות של וקטור כלשהו $\vec{v} \in V$ הן:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n = \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \vec{v}_1 + \dots + \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_n \rangle}{\langle \vec{v}_n, \vec{v}_n \rangle} \vec{v}_n$$

כלומר:

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_n \rangle}{\langle \vec{v}_n, \vec{v}_n \rangle} \end{pmatrix}$$

אם $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ בסיס א"נ (בא"נ) אזי:

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{v}_n \rangle \vec{v}_n$$

כלומר:

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{v}, \vec{v}_n \rangle \end{pmatrix}$$

8.7 משפט פיתגורס המוכלל

משפט (משפט פיתגורס): יהי V ממ"פ עם נורמה מושרית, ויהי $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ בא"נ. אזי לכל $\vec{v} \in V$ מתקיים:

$$\|\vec{v}\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 = |\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle \vec{v}, \vec{v}_n \rangle|^2$$

במילים: אורך הוקטור בריבוע שווה לסכום ריבועי גדלי רכיביו (אורך הניצבים).

8.8 היטל

היטל של $\vec{v}$ על $\vec{w}$ מוגדר להיות:

$$\pi_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} \vec{w}$$

8.9 הטלת וקטור על תת-מרחב

הגדרה:

יהי V ממ"פ, ויהי $W \subseteq V$ תת מרחב של V . אזי ההטלה של $v \in V$ על W היא הווקטור המסומן $\pi_W(v)$ שמקיים:

- $\pi_W(v) \in W$
- $v - \pi_W(v) \in W^\perp$

נוסחת ההטלה:

$$\pi_W(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

8.10 אלגוריתם גרס-שמידט

יהי V ממ"פ (עם הנורמה המושרית), ותהי $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ סדרת וקטורים בת"ל. אלגוריתם גרס-שמידט הוא התהליך הבא ליצירת בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \vec{v}_1 \\ \vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \pi_{\vec{w}_1}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - \pi_{\text{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}}(\vec{v}_3) = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 \\ &\vdots \\ \vec{w}_n &= \vec{v}_n - \pi_{\text{span}\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-1}\}}(\vec{v}_n) = \vec{v}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_k \rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k \rangle} \vec{w}_k \end{aligned}$$

מתקיים:

- $\text{span}\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\} = \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$
- $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ אורתוגונלי.

9 המרחב הניצב

9.1 הגדרה

הגדרה: המרחב הניצב: יהי V ממ"פ ויהי $S \subseteq V$ תת קבוצה. נגדיר את המרחב הניצב ל- S :

$$S^\perp = \{\vec{v} \in V \mid \forall \vec{s} \in S : \vec{v} \perp \vec{s} \rightarrow \langle \vec{s}, \vec{v} \rangle = 0\}$$

טענה: לכל קבוצה $S \subseteq V$, המרחב הניצב $S^\perp$ הוא תת-מרחב וקטורי.

9.2 טענות על המרחב הניצב

טענה: מתקיים ש

$$1. \{0\}^\perp = V$$

$$2. V^\perp = \{0\}$$

$$3. \text{אם } S_1 \subseteq S_2 \subseteq V \text{ אז } S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$$

$$4. \text{לכל } S \subseteq V \text{ מתקיים } (\text{span}(S))^\perp = S^\perp$$

9.3 משפט הפירוק הניצב

משפט (משפט הפירוק הניצב): לכל תת-מרחב $U \subseteq V$ במרחב מכפלה פנימית V , מתקיים:

$$V = U \oplus U^\perp$$

בפרט נובע כי:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

10 אופרטורים נורמליים, הרמיטיים ואוניטריים

10.1 האופרטור הצמוד

הגדרה: יהי V ממ"פ, ויהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור. האופרטור $T^* : V \rightarrow V$ נקרא **צמוד לאופרטור** T אם לכל $\vec{v}, \vec{w} \in V$ מתקיים:

$$\langle T\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, T^*\vec{w} \rangle$$

טענה: יהי V ממ"פ נוצר סופית, אזי לכל אופרטור $T : V \rightarrow V$ קיים אופרטור צמוד יחיד. יתר על כן, אם B בא"נ ל- V אזי:

$$[T^*]_B = \overline{([T]_B)^t} = ([T]_B)^*$$

עבור מטריצה $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, המטריצה הצמודה שלה מוגדרת להיות:

$$A^* = \overline{(A^t)}$$

זו נקראת המטריצה הצמודה.

10.2 טענות על האופרטור הצמוד

טענה: (תכונות של האופרטור הצמוד)

$$1. (T^*)^* = T$$

$$2. (S + T)^* = S^* + T^*$$

$$3. (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$$

$$4. T \text{ הפיך אם ורק אם } T^* \text{ הפיך.}$$

$$5. (ST)^* = T^* S^*$$

מסקנה:

$$\bullet (\operatorname{im} T^*)^\perp = \ker T$$

$$\bullet (\ker T^*)^\perp = \operatorname{im} T$$

10.3 סוגי אופרטורים

יהי V ממ"פ ויהי T אופרטור. אזי T נקרא:

$$\bullet \text{ אופרטור נורמלי: אם } TT^* = T^*T$$

$$\bullet \text{ אופרטור הרמיטי (צמוד לעצמו או סימטרי): אם } T = T^*$$

$$\bullet \text{ אופרטור אנטי-הרמיטי (אנטי סימטרי): אם } T = -T^*$$

$$\bullet \text{ אופרטור אוניטרי (אורתוגונלי): אם } T^{-1} = T^*$$

$$\bullet \text{ אופרטור איזומטרי: אם } \|Tv\| = \|v\| \text{ לכל } v \in V$$

משפט: יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי. אזי התנאים הבאים שקולים:

$$1. T \text{ אוניטרי.}$$

$$2. \text{ לכל } u, v \in V \text{ מתקיים } \langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle.$$

$$3. \text{ לכל } v \in V \text{ מתקיים } \|Tv\| = \|v\|.$$

משפט: מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ היא אוניטרית אם ורק אם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי.
טענה:

1. תהי A מטריצה אוניטרית, אזי שהערכים העצמיים שלה מערך מוחלט 1.
2. תהי A מטריצה אוניטרית, אזי $|\det A| = 1$.
3. תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מטריצה מדטרמיננטה 1, אזי 1 ע"ע.

10.4 לכסינות אוניטרית

הגדרה: **לכסון אוניטרי (אורתוגונלי):** מטריצה A היא לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית P (כאשר V מעל F^n) כך ש:

$$PAP^{-1} = D$$

כאשר D מטריצה אלכסונית.

משפט: מטריצה מעל $\mathbb{C}$ ניתנת ללכסון אוניטרי אם ורק אם היא נורמלית. מטריצה מעל $\mathbb{R}$ ניתנת ללכסון אורתוגונלי אם ורק אם היא סימטרית.
הגדרה: יהי V ממ"פ נוצר סופית, ויהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור. T נקרא **לכסין אוניטרי** אם קיים לו בא"נ מלכסן.
משפטים:

- יהי V ממ"פ נוצר סופית, ויהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור בעל פולינום אופייני מל"ל אזי T לכסין אוניטרי אם ורק אם T נורמלי.
- תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ כך ש- $AA^* = A^*A$ וכן A משולשית. אזי A אלכסונית.
- $T = T^*$ אם ורק אם T נורמלי וגם כל הע"ע של T ממשיים.
- $T^* = -T$ אם ורק אם T נורמלי וכל הע"ע מדומים טהורים.
- T אוניטרית אם ורק אם כל הע"ע הם באורך 1.

אלגוריתם: (לכסון אוניטרי)

1. מצא פולינום אופייני, מרחבים עצמיים.
2. מצא בסיסים גרם שמידט על כל מרחב עצמי בנפרד כדי לקבל בסיס אורתונורמלי למרחב העצמי.
3. הבסיס כולו הוא בסיס אורתונורמלי למרחב.

11 משפט ז'ורדן וצורת ז'ורדן

(ע"ע תודה לאביב ולרועי)

הגדרה: J תקרא **צורת ז'ורדן** של מטריצה A אם ורק אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש:

$$A = PJP^{-1}$$

כאשר P נקראת המזרדנת.

ובנוסף כאשר מתקיים כי J מורכבת מבלוקי ז'ורדן של הערכים העצמיים של A , כלומר:

$$J = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} J_{m_i}(\lambda_i)$$

כאשר כל $J_{m_i}(\lambda_i)$ הוא בלוק ז'ורדן מהצורה:

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

11.1 תכונות של מטריצת ז'ורדן

- **מספר בלוקי ז'ורדן** עבור ערך עצמי מסוים שווה לריבוי הגיאומטרי של אותו ערך עצמי.
- **סכום גדלי הבלוקים (לכל ע"ע)** שווה לריבוי האלגברי של אותו ע"ע.
- **גודל הבלוק המקסימלי** עבור ערך עצמי מסוים הוא החזקה של הגורם הלינארי המתאים בפולינום המינימלי.
- A לכסינה אם ורק אם כל הבלוקי ז'ורדן שלה הם בגודל 1×1 , כלומר J היא מטריצה אלכסונית.
- צורה זו יחידה עד כדי סדר בלוקים.

12 אלגוריתם לקביעת צורות ז'ורדן מתוך הפולינום המינימלי

נניח שיש לנו מטריצה A עם פולינום מינימלי הנתון על ידי

$$m_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{d_i},$$

וכן (אם קיים) פולינום אופייני

$$p_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{a_i} \quad \text{רשאכ } a_i \geq d_i.$$

הרעיון הבסיסי הוא כדלקמן:

- עבור כל ערך עצמי λ_i :

- הפולינום המינימלי קובע את הגודל המקסימלי של בלוק ז'ורדן עבור λ_i . כלומר, לפחות אחד מהבלוקים עבור λ_i יהיה בגודל d_i .
- הפולינום האופייני קובע את הסכום הכולל של גדלי כל הבלוקים עבור λ_i – סכום זה הוא a_i .

- יש לראות את a_i כמספר שמצריך פירוק לסכום של מספרים טבעיים (כל אחד מייצג את גודל בלוק ז'ורדן), כאשר המספר הגבוה ביותר בפירוק חייב להיות d_i . כל פירוק כזה מציע סידור אפשרי של בלוקים עבור λ_i .
- לבסוף, צורת הז'ורדן של A היא האיחוד הישר של כל בלוקי הז'ורדן עבור כל הערכים העצמיים. כלומר, עבור כל λ_i נבחרת חלוקה אפשרית של a_i למספרים טבעיים כך שסכומם הוא a_i והמספר הגדול ביותר הוא d_i .

לסיכום:

- הפולינום המינימלי קובע את גודל הבלוק הגדול ביותר עבור כל λ_i .
- הפולינום האופייני קובע את סכום גדלי כל הבלוקים עבור λ_i .
- כדי למצוא את כל צורות הז'ורדן האפשריות, עבור כל ערך עצמי λ_i מחלקים את a_i למספרים טבעיים כך שהמספר הגדול ביותר בפירוק יהיה d_i .
- צורת הז'ורדן הכוללת היא האיחוד הישר של צורות הז'ורדן עבור כל ערך עצמי.

12.1 ניסוח המשפט

משפט ז'ורדן: תהי $A \in F^{n \times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה F . אזי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים אם ורק אם A דומה למטריצה J , מטריצה אלכסונית בלוקים, כאשר כל בלוקיה הם בצורת ז'ורדן.

13 האלגוריתם לזרדון מטריצה

אלגוריתם

תהי A מטריצה כך שהפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

1. מוצאים את הפולינום האופייני של המטריצה. נסמן את הערכים העצמיים השונים של A ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

2. עבור כל ערך עצמי λ , נמצא בסיס למרחב העצמי המוכלל K_λ באופן הבא:

2.1 נסמן ב- k את החזקה של הגורם $(\lambda - x)$ בפולינום המינימלי.

2.2 נמצא בסיס ל- $C[(A - \lambda I)^{k-1}] \cap V_\lambda$ באופן הבא:

2.2.1 נביט במטריצה $(A - \lambda I)$, ונבחר עמודות $C_{i_1}, \dots, C_{i_t}$ הפרשות את $C[(A - \lambda I)^{k-1}]$.

2.2.2 נפתור את מערכת המשוואות:

$$(A - \lambda I)(a_1 C_{i_1} + \dots + a_t C_{i_t}) = 0$$

2.2.3 לכל וקטור בבסיס מרחב הפתרונות $(a_1, \dots, a_t)$, של המשוואה הנ"ל נמצא את הווקטורים u כך ש:

$$u = a_1 e_{i_1} + \dots + a_t e_{i_t}$$

2.2.4 עבור כל וקטור פתרון כללי נסיף את כל הווקטורים שמתקבלים מהפעולה $(A - \lambda I)^{k-1} u, (A - \lambda I)u, u$, ונרשום אותם לפי סדר זה.

2.3 בצורה דומה נפעל עבור $k-3, k-2, \dots$, כאשר התחלנו מהחזקה הגבוהה בפולינום המינימלי.

2.4 נסיים את התהליך כאשר נקבל מספר וקטורים השווה לריבוי האלגברי של λ .

3. נאחד את כל הבסיסים המז'רדנים לבסיס אחד- B - ללא שינוי סדר הווקטורים.

4. נשים את איברי הבסיס B בעמודות המטריצה P , נחשב ונקבל את המטריצה הבאה:

$$P^{-1}AP$$

שהיא צורת ז'ורדן.

14 תבניות בילינאריות ומטריצות חיוביות לחלוטין

14.1 תבנית בי לינארית

הגדרה: תבנית בי לינארית הנוצרת ממטריצה ריבועית A היא פעולה בין שני וקטורים $\vec{v}, \vec{w}$ מהצורה הבאה:

$$\vec{v}^t A \vec{w}$$

14.2 מטריצה חיובית לחלוטין (ממשית סימטרית)

הגדרה: מטריצה ממשית סימטרית נקראת חיובית לחלוטין אם לכל $\vec{v} \neq \vec{0}$ מתקיים כי $\vec{v}^t A \vec{v} > 0$.

14.3 מטריצה חיובית לחלוטין (הרמיטית)

הגדרה: מטריצה הרמיטית $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (כלומר $A = A^*$) נקראת חיובית לחלוטין אם כל הע"ע שלה חיוביים.

טענה: המטריצה ההרמיטית $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ חיובית לחלוטין אם ורק אם לכל וקטור $\vec{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ מתקיים כי

$$\vec{x}^* A \vec{x} > 0$$

14.4 קריטריון סילבסטר

הגדרה: תהי מטריצה ריבועית A . נסמן את הבלוק בגודל $k \times k$ השמאלי העליון שלה ע"י $A_{((k))}$. כלומר הבלוק המתקבל ממחיקת השורות והעמודות $k+1, \dots, n$. כמו כן נסמן את המינורים הראשיים להיות

$$\Delta_k = \det(A_{((k))})$$

משפט (קריטריון סילבסטר): תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה הרמיטית אזי A חיובית לחלוטין אם ורק אם לכל $i \in \{1, \dots, n\}$ מתקיים כי $\Delta_i > 0$.

14.5 צורות גיאומטריות מתבניות בילינאריות

במישור הדו-ממדי (עקומות ממעלה שנייה - חתכי חרוט)

• אליפסה:

$$-\text{משוואה קנונית: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

• היפרבולה:

$$-\text{משוואה קנונית: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

• פרבולה:

$$-\text{משוואה קנונית: } y^2 = 4ax$$

• מעגל:

– משוואה קנונית: $x^2 + y^2 = a^2$.

14.6 מקרים מנוונים - משוואות קנוניות

• נקודה:

– משוואה קנונית (במישור הדו-ממדי): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (עבור אליפסה מנוונת, כאשר $a=b=0$, מתקבלת נקודה בודדת)

• קו ישר:

– משוואה קנונית (במישור הדו-ממדי): אין משוואה ריבועית קנונית המתארת קו ישר בודד כמקרה מנוון של חתכי חרוט. קו ישר מתואר על ידי משוואה לינארית.

• זוג קווים ישרים נחתכים:

– משוואה קנונית (במישור הדו-ממדי): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ או $xy = 0$ (מתקבל מזוג היפרבולות מנוונות)

• מרחב ריק (קבוצה ריקה):

– משוואה קנונית (במישור הדו-ממדי): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (עבור אליפסה מדומיינת)

14.7 מדריך למציאת זווית סיבוב ושיקוף (בצורות ריבועיות)

כאשר נתונה משוואה ריבועית כללית, ניתן להביא אותה לצורה קנונית על ידי סיבוב ו/או שיקוף של מערכת הצירים, ובמקרים מסוימים גם הזהה. להלן מדריך כללי למציאת זווית הסיבוב ובדיקה אם יש צורך בשיקוף.

עבור עקומות ממעלה שנייה (במישור הדו-ממדי):

נתונה משוואה כללית מהצורה:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. מטריצת התבנית הריבועית: בנו את המטריצה הריבועית Q המתאימה לחלק הריבועי של המשוואה:

$$Q = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

2. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים: מצאו את הערכים העצמיים λ_1, λ_2 ואת הוקטורים העצמיים המתאימים $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ של המטריצה Q .

3. מטריצת הסיבוב P : נרמל את הוקטורים העצמיים $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ונשים אותם כעמודות במטריצה $P = \begin{bmatrix} \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} & \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \end{bmatrix}$. המטריצה P היא מטריצה אורתוגונלית המייצגת סיבוב.

4. **זווית הסיבוב θ :** אם $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, אז θ היא זווית הסיבוב נגד כיוון השעון. ניתן לחלץ את $\cos \theta$ ו- $\sin \theta$ מהאיברים של P ולמצוא את θ .

אם $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, אז θ היא זווית הסיבוב עם כיוון השעון. ניתן לחלץ את $\cos \theta$ ו- $\sin \theta$ מהאיברים של P ולמצוא את θ .

5. **שיקוף:** בדקו את הדטרמיננטה של P . אם $\det(P) = 1$, מדובר בסיבוב בלבד ופשוט צריך למצוא את הזווית של המטריצה שלמעלה. אם $\det(P) = -1$, זה שיקוף

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ ואתם מקבלים}$$

שימו לב לפעמים שיקוף היא גם מטריצת סיבוב, לדוגמא:

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אבל $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ היא מטריצת שיקוף סביב ציר האיקס ולכן

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

היא שיקוף סביב ציר האיקס ולאחר מכן סיבוב.