

מד"ר למתמטיקאים

תרגיל 4

הערה: התרגיל מורכב משאלות חובה (9-1) ושתי שאלות בונוס של 20% (10,11)

1. יהיו $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{21})^T$ ו $\mathbf{x}_2 = (x_{12}, x_{22})^T$ פתרונות של המערכת ההומוגנית $\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{x}$, כאשר $\mathbf{P}_{ij} = p_{ij}(t)$, פונקציות רציפות בקטע $((a, b))$ ויהי $W(t) = \det \Psi$ הורונסקיאן של המערכת, כאשר $\Psi_{ij} = x_{ij}$ מטריצה פונדמנטלית של המערכת ההומוגנית. הוכיחו כי

$$W(t) = W_0 \exp \left(\int \text{tr} \mathbf{P} dt \right).$$

(רמז: קבלו את המשוואה $dW/dt = (\text{tr} \mathbf{P})W$).

פתרון: נרשום $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) = x'_{11}x_{22} + x_{11}x'_{22} - x'_{12}x_{21} - x_{12}x'_{21}$ נציב עבור הנגזרות $x'_{ij} = \sum_{k=1}^2 p_{ik}x_{kj}$ ונקבל $dW/dt = (p_{11} + p_{22})(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) = (\text{tr} \mathbf{P})W$ ולכן $W(t) = W_0 \exp \left(\int \text{tr} \mathbf{P} dt \right)$.

2. אם $x_1 = y$ ו $x_2 = y'$ אזי ניתן לרשום את המשוואה

$$(1) \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

כמערכת של שתי משוואות

$$(2) \quad \begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{aligned}$$

הוכיחו כי אם $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ פתרונות יסודיים של משוואה (2) ו y_1, y_2 פתרונות יסודיים של משוואה (1), אזי $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = cW(y_1, y_2)$ כאשר $c \neq 0$.

פתרון: נרשום את המערכת (2) בצורה מטריציונית $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \mathbf{x}$ עבור מטריצת המקדמים מתקיים $\det \mathbf{P} = -p$ ולכן, ע"פ תוצאת שאלה 1. $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = W_0 \exp \left(- \int p dt \right) = cW(y_1, y_2)$

3. מצאו פתרון כללי למערכות הבאות

$$(א) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \text{פתרון: } \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{ב})$$

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad \text{פתרון:}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} e^t$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{ד})$$

פתרון:

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right]$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{ה})$$

פתרון:

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

4. ידוע כי עבור ערכים עצמיים מרוכבים $r_1 = \lambda + i\mu, r_1^* = \lambda - i\mu$ עם וקטורים עצמיים $\xi_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \xi_1^* = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ ניתן לרשום פתרונות יסודיים ממשיים $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ הוכיחו כי $\mathbf{u} = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t), \mathbf{v} = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t)$ בלתי-תלויים-לינראית (בת"ל). (רמז: רשמו $c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} = 0$ ובטאו את $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ באמצעות ξ_1, ξ_2 כדי להראות ש $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ בת"ל. כתבו $k_1 \mathbf{u}(t_0) + k_2 \mathbf{v}(t_0) = 0$ והראו כי $k_1 = k_2 = 0$)

פתרון: נרשום $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_1^*), \mathbf{b} = -\frac{i}{2}(\xi_1 - \xi_1^*)$ ו ξ_1, ξ_1^* וקטורים עצמיים בת"ל אזי מ $c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} = c_1(1 - i)\xi_1 + c_2(1 + i)\xi_1^* = 0$ נקבל $k_1 \mathbf{u}(t_0) + k_2 \mathbf{v}(t_0) = 0$ אם נרשום כעת $c_1 = c_2 = 0$ כלומר $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ בת"ל.

אזי מאחר ו $e^{\lambda t}[\mathbf{a}(k_1 \cos \mu t_0 + k_2 \sin \mu t_0) + \mathbf{b}(-k_1 \sin \mu t_0 + k_2 \cos \mu t_0)] = 0$
 $\begin{pmatrix} \cos \mu t_0 & \sin \mu t_0 \\ -\sin \mu t_0 & \cos \mu t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ בת"ל נקבל את המערכת ההומוגנית,
 עם פתרון טריוויאלי $k_1 = k_2 = 0$, ולכן $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ בת"ל.

5. נתבונן במערכת

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

הראו כי למערכת ע"ע $r = 2$ עם רבוי אלגברי 3. הניחו אם כן פתרונות מהצורה $\xi e^{rt}, \xi t e^{rt} + \eta e^{rt}, \xi \frac{1}{2} t^2 e^{rt} + \eta t e^{rt} + \zeta e^{rt}$ ו מצאו את הפתרון הכללי של המערכת. כתבו את המטריצה $\mathbf{T}$ שעמודותיה הם הוקטורים ξ, η, ζ . מהי מטריצה זו? מהי הטרנספורמציה $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$?

פתרון: הפ"א הוא $P_r = (r - 2)^3 = 0$ ולכן $r = 2$ ע"ע עם רבוי אלגברי 3. תחת ההנחות בשאלה, נקבל 3 משוואות ע"ע $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi, (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = 0, (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi$. הפתרונות היסודיים הינם אפוא,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$ והפתרון הכללי צרוף לינארי שלהם.

המטריצה $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ הינה מטריצה מז'רדנט של $\mathbf{A}$ והטרנספורמציה

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{J} \text{ מביאה את } \mathbf{A} \text{ לצורת ז'ורדן}$$

6. מצאו פתרון כללי למערכות הלא הומוגניות הבאות

את הבעיות הבאות ניתן לפתור או ע"י לכסון הבעייה (אם ניתן) ע"י ההצבה $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{y}$ ופתרון המערכת $\mathbf{y}' = \mathbf{D} \mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{g}$, כאשר $\mathbf{T}$ המטריצה המלכסנת ו $\mathbf{D}$ המטריצה האלכסונית עם ע"ע של $\mathbf{A}$, או בצורה יותר כללית, ע"פ

ואריצית הפרמטרים, ע"י פתרון המערכת $\Psi(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}'(t)$ כאשר Ψ המטריצה הפונדמנטלית של המערכת ההמוגונית.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

פתרון: $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

פתרון:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{5}(2t - \frac{3}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \cos 2t + c_1) \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \frac{1}{5}(t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{3}{2} \cos 2t + c_2) \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0 \quad (\text{ג})$$

פתרון:

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln t + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} t^{-1} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} t^{-2}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi \quad (\text{ד})$$

פתרון:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{5}(\ln(\sin t) - \ln(-\cos t) - \frac{2}{5}t + c_1) \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \frac{2}{5}(\ln(\sin t) - \frac{4}{5}t + c_2) \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

7. נתבונן בבעיית שטורם ליוביל

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y$$

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \quad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0. \quad (3)$$

ע"י שמוש בזהות לגרנג'

$$\int_0^1 L[u]v dx = \int_0^1 [-(pu')'v + quv] dx,$$

כאשר u, v פונקציות ממשיות גזירות פעמיים ברציפות ב $[0, 1]$ המקיימות את תנאי השפה של בעייה (3), הראו כי L אופרטור צמוד לעצמו $(L[u], v) = (u, L[v])$ כאשר

$$(f, g) = \int_0^1 f g dx, \forall f, g \in C^2[0, 1]$$

מכפלה פנימית.

פתרון: ע"פ זהות לגרנג'

$$\begin{aligned} \int_0^1 L[u]v dx &= \int_0^1 [-(pu')'v + quv] dx = -pu'v|_0^1 + \int_0^1 (pu'v' + quv) dx = \\ &= -pu'v|_0^1 + \int_0^1 -(pv')'u dx + pv'u|_0^1 + \int_0^1 quv dx = \\ &= -p(u'v - v'u)|_0^1 + \int_0^1 [-(pv')'u + quv] dx = -p(u'v - v'u)|_0^1 + \int_0^1 L[v]u dx \end{aligned}$$

ונקבל

$$\int_0^1 (L[u]v - uL[v]) dx = -p(u'v - v'u)|_0^1.$$

מאחר ו u, v מקיימים את תנאי השפה (3) נובע כי

$$\int_0^1 (L[u]v - uL[v]) dx = 0,$$

כלומר $(L[u], v) = (u, L[v])$.

8. מצאו פונקציות עצמיות מנורמלות לבעיות שטורם ליוביל הבאות

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0 \quad (\text{א})$$

פתרון: הפתרון הכללי הינו $y = A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x$, $\lambda > 0$ ומתנאי השפה מקבלים $A = 0$ ואת משוואת הע"ע $\cot \sqrt{\lambda_n} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2}$. לכן הפונקציות העצמיות המנורמלות הן $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin^2 \sqrt{\lambda_n}}} \cos \sqrt{\lambda_n} x$

$$y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 0 \quad (\text{ב})$$

(רמז: הציבו $y = s(x)u(x)$ וקבעו את $s(x)$ כך שהמד"ר עבור u אינה מכילה איברים מהצורה $u'(x)$. פתרון את בעיית השפה עבור u וע"י כך מצאו ע"ע ווקטורים עצמיים לבעייה המקורית.)

פתרון: בהצבת $y = su$ ובחירת $s = e^x$ נקבל את המשוואה $u'' + \lambda u = 0$ עם תנאי השפה $u(0) = u(1) = 0$. לבעיית הע"ע עבור u פונקציות עצמיות $u_n \propto \sin n\pi x$ לכן לבעיית המקורית פונקציות עצמיות $\phi_n = \frac{2}{n\pi} \sqrt{\frac{n^2\pi^2+1}{e^2-1}} e^x \sin n\pi x$.

9. הראו כי פונקצית גרין של בעיית שטורם ליוביל

$$-y'' = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

נתונה ע"י $G(x, s)$ כאשר $G(x, s) = \begin{cases} 1-x & , 0 \leq s \leq x \\ 1-s & , x \leq s \leq 1 \end{cases}$ מקיימת

$$y = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds.$$

(רמז: מצאו פתרון כללי לבעיית האי הומוגנית בעזרת ואריציית הפרמטרים והציבו את תנאי השפה המתאימים).

פתרון: ע"פ ואירצית הפרמטרים, הפתרון הכללי של המד"ר האי-הומוגנית (ראו פתרון 4 בתרגיל 2) הינו

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2 x + \int_0^x \frac{f(s)W_1(s)}{W(s)} ds + x \int_0^x \frac{f(s)W_2(s)}{W(s)} ds \\ &= c_1 + c_2 x + \int_0^x s f(s) ds - x \int_0^x f(s) ds. \end{aligned}$$

מתנאי השפה נקבל

$$c_1 = \int_0^1 (1-s) f(s) ds, \quad c_2 = 0$$

ולכן

$$\begin{aligned} y &= \int_0^x (1-s) f(s) ds + \int_x^1 (1-s) f(s) ds + \int_0^x (s-x) f(s) ds = \\ &= \int_0^x (1-x) f(s) ds + \int_x^1 (1-s) f(s) ds = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds, \end{aligned}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} 1-x & , 0 \leq s \leq x \\ 1-s & , x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר}$$

בנוסף: בשתי השאלות הבאות נתבונן בבעיות שטורם-ליוביל לא הומוגניות

$$\begin{aligned} L[y] &= -(p(x)y')' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x) \\ a_1 y(0) + a_2 y'(0) &= 0, \quad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \end{aligned}$$

כאשר μ פרמטר ו f רציפה ב $[0, 1]$. לבעיות כאלו קיים פתרון יחיד

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(\lambda_n - \mu)} \phi_n$$

כאשר $b_n = (f, \phi_n)$, אם $\mu \neq \lambda_n, \forall n$. אחרת, אם $\mu = \lambda_m$ אזי:

(א) אם f, ϕ_m אורתוגונליים קיים פתרון המכיל איבר הפרופורציוני ל ϕ_m (שרירותי). פתרון זה כמובן, אינו יחיד.

(ב) אחרת, אין פתרון

10. מצאו פתרון לבעיות האי הומוגניות הבאות

$$y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, y'(1) = 0 \quad (\text{א})$$

פתרון: עבור $\mu = 2$, $p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = 1, f(x) = x$, נקבל את הבעיה ההומוגנית $y'' + \lambda y = 0$ עם ע"ע $\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{2}(n - \frac{1}{2})$ ופונקציות עצמיות $\phi_n = \sqrt{2} \sin \pi(n - \frac{1}{2})x$. ברור כי $\mu \neq \lambda_n, \forall n$ לכן לבעיה האי

$$y = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{[\pi^2(n - \frac{1}{2})^2 - 2] \pi^2(n - \frac{1}{2})^2} \sin \pi(n - \frac{1}{2})x$$

$$y'' + 2y = -1 + |1 - 2x|, \quad y(0) = 0, y(1) = 0 \quad (\text{ב})$$

פתרון: עבור בחירה של פונקציות $p(x), q(x), r(x)$ ופרמטר μ , זהה לאלו שבשאלה (10א), נקבל פונקציות עצמיות $\phi_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$ עם ע"ע $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$. מאחר ו $\mu \neq \lambda_n, \forall n$ נקבל פתרון יחיד

$$y = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{(n^2\pi^2 - 2)n^2\pi^2} \sin n\pi x$$

11. בבעיות הבאות קבעו האם קיים ערך של a עבורו קיים פתרון. מצאו את הפתרון אם קיים.

$$y'' + 4\pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, y(1) = 0 \quad (\text{א})$$

פתרון: הפונקציות העצמיות של בעיה זו הם $\phi_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$ עם ע"ע $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$. לכן $\mu = 4\pi^2 = \lambda_2$. כעת, $(a + x, \phi_2) \neq 0$ לכל a ולכן אין לבעיה פתרון.

$$y'' + \pi^2 y = a, \quad y(0)' = 0, y'(1) = 0 \quad (\text{ב})$$

פתרון: הפונקציות העצמיות של בעיה זו הם $\phi_n = \sqrt{2} \cos n\pi x$ עם ע"ע $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$. לכן $\mu = \pi^2 = \lambda_1$ ומתקיים $(a, \phi_1) = 0$ לכל a . לכן $y = c \cos \pi x + a/\pi^2$.

$$y'' + \pi^2 y = a - \cos \pi x, \quad y(0) = 0, y(1) = 0 \quad (\text{ג})$$

פתרון: הפונקציות העצמיות של בעיה זו הם $\phi_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$ עם ע"ע $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$. לכן $\mu = \pi^2 = \lambda_1$. כעת, $(a - \cos \pi x, \phi_1) = 0$ עבור $a = 0$ ולכן $y = c \sin \pi x - (x/2\pi) \sin \pi x$.