

תרגיל 8

1. א. הוכיחו כי אם $R \subseteq S$ אזי גם $R \circ T \subseteq S \circ T$ עבור R, S, T יחסים כלשהם על קבוצה A .
 ב. הוכיחו כי יחס R טרנזיטיבי אם $R^2 \subseteq R$.
 ג. הוכיחו כי אם R טרנזיטיבי אזי R^n טרנזיטיבי לכל n .

פיתרון:

- א.
 יהיו $x, y \in A$ כך ש $(x, y) \in R \circ T$, לכן, לפי הגדרה, קיים $b \in A$ כך ש $(x, b) \in T$ וכן $(b, y) \in R$.
 וכן $(b, y) \in S$, ולכן $(b, y) \in S$, ולכן $(x, y) \in S \circ T$.
 בס"כ קיבלנו לפי הגדרה ש $(x, y) \in S \circ T$. ולכן $R \circ T \subseteq S \circ T$ כדרוש.
 ב.
 $R^2 \subseteq R$ טרנזיטיבי אמ"מ
 הוכחה:
 $(\Leftarrow)$: אם R טרנזיטיבי:
 יהי

$$\begin{aligned} (x, z) &\in R^2 \\ \Downarrow \\ \exists y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \\ \Downarrow \\ (x, z) &\in R \\ \Downarrow \\ R^2 &\subseteq R \end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$: נניח כי $R^2 \subseteq R$:
 יהי

$$(x, y), (y, z) \in R$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ (x, z) \in R^2 \\ \Downarrow \\ (x, z) \in R \end{array}$$

ג.

מא' וב' נובע גם ש $R^{n+1} = R^2 R^{n-1} \subseteq R R^{n-1} = R^n$ ולכן R^n טרנזיטיבי.

2. הגדרה: תת קבוצה A של המספרים הממשיים נקראת 'מגניבה' אם לכל $x, y \in A$ כך ש- x שונה מ- y מתקיים שההפרש $x - y$ אינו רציונאלי. תהי B קבוצה מגניבה מקסימלית ביחס להכלה, הוכח שלכל מספר ממשי שאינו שייך ל- B קיים איבר ב- B כך שההפרש ביניהם הוא רציונאלי.

פתרון:

נניח בשלילה שקיים איבר ממשי r שאינו ב- B , ולכל איבר $b \in B$ ההפרש $r - b$ אינו רציונאלי. לכן אם נוסיף את r ל- B נקבל קבוצה מגניבה המכילה ממש את B (ולא שווה לה) בסתירה למקסימאליות של B .

3. תהי A קבוצה, ו- $A_1, A_2, \dots, A_n$ אוסף של תתי קבוצות שלה (כלומר, $\forall 1 \leq i \leq n : A_i \subseteq A$). נגדיר על $A \times A$ יחס R ע"י:

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid \exists i \text{ such that } x \in A_i \wedge y \in A_i\}$$

(הסבר במילים, הזוג הסדור (x, y) נמצא ביחס R אם ורק אם קיימת קבוצה A_i מבין הקבוצות שהגדרנו כך ש- $x \in A_i$ גם $y \in A_i$ הוכח או הפרך:

א. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.

ב. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.

ג. לכל $i \neq j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$ טרנזיטיבי.

ד. $R \Leftarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$ טרנזיטיבי.

פתרון:

א. הוכחה: יהי $a \in A$, צריך להראות ש- $(a, a) \in R$. מהנתון ש- $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$ נובע שקיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $a \in A_i$, ולכן (a, a) מקיים את התנאי של היחס ולכן $(a, a) \in R$.

ב. הוכחה: נניח ש- R רפלקסיבי, מספיק להוכיח ש- $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$, כי ההכלה בצד השני טריוויאלית, כי כולם תתי קבוצות של A . לכן יהי $a \in A$, כיון ש- R רפלקסיבי נובע ש- $(a, a) \in R$, ולכן קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $a \in A_i$, ולכן הוא גם באיחוד.
ג. הוכחה: יהיו $a, b, c \in A$ כך ש- $(b, c) \in R \wedge (a, b) \in R$, אזי נובע שקיים i כך

ש- $a \in A_i \wedge b \in A_i$ וקיים j כך ש- $b \in A_j \wedge c \in A_j$. כעת, אם $i \neq j$, אז נובע ש- $b \in A_i \cap A_j$, בסתירה לנתון. לכן $i = j$, ולכן גם $c \in A_i$, ולכן $(a, c) \in R$.

ד. הפרכה: ניקח את $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ואת תתי הקבוצות: $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4\}$. אזי R טרנזיטיבי אבל $A_1 \cap A_2 = \{3\} \neq \emptyset$.

4. תהי A קבוצה, ו- R, S יחסי שקילות מעליה. הוכח או הפרך:

- $R \cup S$ יחס שקילות.
- $(A \times A) \setminus R$ יחס שקילות.
- $T = [(A \times A) \setminus S] \cup I_A$ יחס שקילות (I_A הוא יחס השיוויון).
- $R \setminus S$ יחס שקילות.
- $R \cap S$ יחס שקילות.
- R^2 יחס שקילות.

פיתרון:

א. לא. $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$, $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (2, 3)\}$. שימו לב ש- $(1, 2) \in R \cup S \wedge (2, 3) \in R \cup S$ אבל $(1, 3) \notin R \cup S$, ולכן $R \cup S$ לא טרנזיטיבי ולכן לא יחס שקילות.

ב. לא. $A = \{1\}$, $R = \{(1, 1)\}$ אזי $(A \times A) \setminus R = \emptyset$ ולא רפלקסיבי, ולכן לא יחס שקילות.

ג. לא. $A = \{1, 2, 3\}$, $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ אזי $(2, 3) \in T \wedge (3, 1) \in T$ כי הם לא ב- S , ובנוסף, $(2, 1) \notin T$ כי הוא ב- S , ולכן T לא טרנזיטיבי ולכן לא יחס שקילות.

ד. לא. $A = \{1\}$, $R = S = \{(1, 1)\}$ אזי $R \setminus S = \emptyset$ ולא רפלקסיבי, ולכן לא יחס שקילות.

ה. כן. רפלקסיבי: יהי $a \in A$, אזי $(a, a) \in R \wedge (a, a) \in S$ ולכן $(a, a) \in R \cap S$. סימטרי: נניח $(a, b) \in R \cap S$ אזי $(a, b) \in R \wedge (a, b) \in S$ ולכן (מסימטריות של R, S שהם יחסי שקילות) $(b, a) \in R \wedge (b, a) \in S$ ולכן $(b, a) \in R \cap S$.

טרנזיטיבי: $(a, b) \in R \cap S \wedge (b, c) \in R \cap S \Rightarrow ((a, b) \in R \wedge (a, b) \in S) \wedge ((b, c) \in R \wedge (b, c) \in S) \Rightarrow ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \wedge ((a, b) \in S \wedge (b, c) \in S) \Rightarrow (a, c) \in R \wedge (a, c) \in S \Rightarrow (a, c) \in R \cap S$.

מעבר ראשון הגדרת חיתוך. מעבר שני אסוציאטיביות של "וגם". מעבר שלישי מטרנזיטיביות של R, S שהם בעצמם יחסי שקילות. מעבר רביעי הגדרת חיתוך.

ו. כן. ראינו שכאשר R רפלקסיבי אז $R \subseteq R^2$ וכאשר R טרנזיטיבי אז $R^2 \subseteq R$. כיון ש- R יחס שקילות הוא גם רפלקסיבי וגם טרנזיטיבי, ולכן קיבלנו הכל דו כיוונית המניבה $R^2 = R$ שהוא יחס שקילות.

5. נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

חלק א: לגבי כל אחד מיחס השקילות הבאים מעל A מצאו את החלוקה המושרית על ידי:

- $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
- $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
- $R_3 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

חלק ב: השלימו את היחסים הבאים ליחסי שקילות. כלומר, הוסיפו מספר מינימלי של זוגות ליחס על מנת לקבל יחס שקילות:

ד. $R = \phi$

ה. $R = \{(1, 2), (2, 4)\}$

פיתרון:

א. $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

ב. $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}$

ג. $\{1, 2, 3\}, \{4\}$

ד. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

ה. $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 4), (4, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

6. נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. קבע שלוש חלוקות שונות על A ורשום את יחסי השקילות המתאימים.

7. נסמן $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n | (x - y)\}$. מהם R_2, R_1, R_n ? $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$? מהן קבוצות המנה: $\mathbb{Z}/R_2, \mathbb{Z}/R_1, \mathbb{Z}/R$?

פתרון:

R_1 הינו אוסף כל הזוגות הסדורים מעל השלמים, שכן אחד מחלק כל מספר ולכן כל הפרש. R_2 הינו אוסף כל הזוגות בהם שני הצדדים זוגיים או שני הצדדים אי זוגיים, שכן ההפרש ביניהם חייב להיות זוגי.

R הינו אוסף הזוגות שההפרש ביניהם מתחלק בכל המספרים הטבעיים, כיוון שרק הפרש אפס יכול להתחלק בכל מספר, R הינו אוסף הזוגות מהצורה (a, a) עבור a מספר שלם. (יחס השיוויון).

לכן בהתאמה:

$\mathbb{Z}/R_1$ הינו אוסף מחלקות השקילות של היחס המכיל את כל הזוגות. יש בו רק מחלקת שקילות אחת המכילה את כל המספרים השלמים.

$\mathbb{Z}/R_2$ מכיל שתי קבוצות, קבוצת הזוגיים וקבוצת האי זוגיים שכן בין כל הזוגיים יש את היחס, ובין כל האי זוגיים מתקיים היחס (ולא בין לבין כמובן - הרי זה יחס שקילות כפי שראינו בכיתה)

$\mathbb{Z}/R$ הינו אוסף כל הקבוצות המכילות איבר שלם בודד - כל הסינגלטונים. $\mathbb{Z}/R = \{\{a\} : a \in \mathbb{Z}\}$