השלמות על מרחבים וקטוריים:

1. $\{0\}$ היא תמיד תת מרחב. למשל, ב$\mathbb{R}^2$, $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ היא תת מרחב. (קל לראות שיש סגירות לחיבור וסגירות לכפל בסקלר).

הבסיס של מרחב האפס (המרחב שיש בו רק את וקטור האפס) מוגדר להיות קבוצה ריקה.
לכן המימד של מרחב האפס הוא- 0.

2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אז התנאים הבאים שקולים:

א. A הפיכה.
ב. הצורה המדורגת קנונית של A לI מאותו גודל.
ג. $R(A) = \mathbb{R}^n$
ד. $C(A) = \mathbb{R}^n$
ה. $rank(A) = n$
ו. $N(A) = \{0\}$ (המימד הוא 0).
ז. שורות A בת"ל.
ח. עמודות A בת"ל.

ליכסון

תיזכורת: תהי $A \in \mathbb{R}^n$. מספר $\lambda \in \mathbb{R}$ נקרא "ערך עצמי" (ע"ע) של A אם קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש$Av = \lambda v$.

במקרה זה הוקטור v נקרא "וקטור עצמי" של A שמתאים לע"ע λ.
λ הוא ע"ע של A אמ"ם $|A - \lambda I| = 0$.
הפולינום האופייני של A מוגדר להיות $p_A(x) = |xI - A|$.
למשל: $p_I(x) = |xI - I| = |\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix}| = (x-1)^2$
λ הוא ע"ע של A אמ"ם $p_A(\lambda) = 0$.
הע"ע היחיד I הוא 1.

תרגילים:

1. תהי A מטריצה ריבועית. הוכיחו ש0 הוא ע"ע של A אמ"ם A לא הפיכה.

פתרון: 0 הוא ע"ע אמ"ם $|A - 0I| = 0$ אמ"ם $|A| = 0$ אמ"ם A לא הפיכה.

2. הוכיחו שלA ולA^t יש את אותם ע"ע.

פתרון: נוכיח שלA ולA^t יש את אותו פ"א. הפ"א של A הוא $|xI - A|$. אנחנו יודעים שלמטריצה ולשיחלוף שלה יש את אותה דטרמיננטה.

$$p_A(x) = |xI - A| = |(xI - A)^t| = |(xI)^t - A^t| = |xI - A^t| = p_{A^t}(x)$$

לA ולA^t יש את אותו פולינום אופייני, ולכן יש את אותם ע"ע, כי הם השורשים של הפולינום האופייני.

לצורך חישוב ערכים עצמיים אנחנו צריכים לדעת למצוא שורשים לפולינומים. לצורך כך נעזר בחילוק פולינומים.

נניח שנתון לנו פולינום ממעלה יותר גדולה מ2.
קודם כל ננחש שורש לפולינום. כלומר, צריך למצוא מספר שמאפס את הפולינום.
צריך להציב מספרים בפולינום ולראות אם מתקבל 0.

מסיק להציב מספרים שמחלקים את המקדם החופשי של הפולינום.
נניח שλ הוא שורש של הפולינום. נחלק את הפולינום ב$(x-\lambda)$.
לדוגמא: מצאו את כל השורשים של הפולינום הבא: $x^3-7x^2+16x-12$.
2 עובד. אנחנו רוצים לחלק את הפולינום ב$x-2$.

$$\begin{array}{c|c}
x^2-5x+6 & \\
\hline
x^3-7x^2+16x-12 & x-2 \\
x^3-2x^2 & \\
\hline
-5x^2+16x-12 & \\
-5x^2+10x & \\
\hline
6x-12 & \\
6x-12 &
\end{array}$$

קיבלנו ש:

$$x^3-7x^2+16x-12=(x-2)(x^2-5x+6)=(x-2)^2(x-3)$$

הגדרות:
תהי A מטריצה ריבועית וλ ע"ע של A.
1. הריבוי האלגברי (ר"א) של λ שווה לחזקה הכי גבוהה של $(x-\lambda)$ שמחלקת את הפ"א.
למשל, אם הפ"א הוא $(x-2)^2(x-3)$ אז הר"א של 2 הוא 2, והריבוי האלגברי של 3 הוא 1.
2. הריבוי הגאומטרי של λ שווה למימד של המרחב העצמי של λ כלומר

$$\dim V_\lambda(A)=\dim(N(A-\lambda I))=\dim(N(\lambda I-A))$$

דוגמאות:
1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$p_A=(x-1)^2$. לכן הע"ע היחיד הוא 1, והריבוי האלגברי שלו הוא 2.
עכשיו צריך לחשב את הריבוי הגאומטרי של 1.

$$N(I-A)=N\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=\left\{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

נציה $x=t$. $y=0$.
הריבוי הגאומטרי הוא 1.
2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$p_A=(x-1)(x-2)$$

יש שני ע"ע $1,2$, הריבוי האלגברי של שניהם הוא 1.
עבור ע"ע 1:

$$V_1=N(I-A)=N(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

הריבוי הגאומטרי הוא 1.

עבור ע"ע 2:

$$V_2 = N(2I - A) = N(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

הריבוי הגאומטרי הוא 1.

משפט: תהי A וλ ע"ע של A. אזי:

1. הריבוי הגאומטרי של λ גדול ממש מ0. (כלומר, לפחות 1)
2. הריבוי הגיאומטרי של λ תמיד קטן שווה מהריבוי האלגברי של λ.

דמיון מטריצות:

הגדרה: יהיו A, B מטריצות ריבועיות מאותו גודל. נגיד שA וB "דומות" אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש

$$P^{-1}AP = B$$

למשל: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

אז $P^{-1} = P$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

לכן A וB דומות.

תרגיל: דמיון מטריצות הוא יחס שקילות.

פתרון:

רפלקסיביות: צריך להראות שכל מטריצה דומה לעצמה. כלומר, לכל A, יש איזשהי מטריצה הפיכה P כך ש

$$P^{-1}AP = A$$

נקח $P = I$. אז $P^{-1} = I$. ואכן

$$IAI = A$$

סימטריות: נניח שA דומה לB צריך להראות שB דומה לA. כלומר, נניח שקיימת P הפיכה כך ש$P^{-1}AP = B$. צריך להוכיח שקיימת Q הפיכה כך ש$Q^{-1}BQ = A$.

נקח $Q = P^{-1}$.

אכן ידוע ש

$$P^{-1}AP = B$$

נכפיל מימין בP^{-1}.

$$P^{-1}A = BP^{-1}$$

נכפיל משמאל בP

$$A = PBP^{-1}$$

נציב $Q = P^{-1}$

$$A = Q^{-1}BQ$$

טרנזיטיביות: נניח שA דומה לB וB דומה לC. כלומר, יש P ו Q הפיכות כך ש$P^{-1}AP = B$ ו$Q^{-1}BQ = C$.
הציב את המשוואה הראשונה בתוך המשוואה השניה.

$$Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = C$$

$$(Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = C$$

$$(PQ)^{-1}A(PQ) = C$$

הגדרה: מטריצה ריבועית A נקראת "לכסינה" אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר, יש P הפיכה וD אלכסונית כך ש

$$P^{-1}AP = D$$

טענה: אם A וB דומות אז יש להן את אותו פ"א. ולכן גם אותם ע"ע ואותו ריבוי אלגברי.
הוכחה: נניח שA וB דומות.

$$P^{-1}AP = B$$

$$p_B = |xI - B| = |xI - P^{-1}AP| = |xIP^{-1}P - P^{-1}AP| =$$

$$|xP^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xI - A)P| = |P^{-1}||xI - A||P| =$$

$$\frac{1}{|P|}|xI - A||P| = |xI - A| = p_A$$

טענה (בלי הוכחה): למטריצות דומות יש את אותו ריבוי גאומטרי לכל ע"ע.
משפט: A לכסינה אמ"ם:

1. הפולינום האופייני מתפרק לגורמים הלינאריים (כלומר ממעלה 1)מעל הממשיים
2. עבור כל ע"ע, הר"א=ר"ג.

אם שני התנאים מתקיימים, אז A לכסינה. המטריצה האלכסונית שדומה לה היא המטריצה שעל האלכסון שלה יש את הע"ע של A, כאשר מספר הפעמים שכל ע"ע מופיע שווה לריבוי האלגברי/גאומטרי.

שימו לב שניתן לשים את הע"ע בסדר שונה, וכך לקבל מטריצות אלכסוניות שונות שדומות לB.

המטריצה P היא מטריצה שבעמודות שלה יש בסיסים למרחבים העצמיים של כל ע"ע, באותו סדר שבו שמנו את הע"ע.

דוגמאות:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה כי הפולינום האופייני שלה הוא $x^2 + 1$ והוא לא מתפרק לגורמים לינאריים, כלומר, גורמים ממעלה 1 מעל הממשיים.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ראינו שהפולינום האופייני שלה הוא $(x-1)^2$ ולכן יש לה ע"ע יחיד, ששווה ל1, מריבוי אלגברי 2. והריבוי הגאומטרי שלו שווה ל1 (חישבנו היום). כלומר, יש ע"ע שעבורו הריבוי האלגברי לא שווה לריבוי הגיאומטרי, ולכן המטריצה אינה לכסינה.