תרגיל 6 - אינפי 4 - תשע"ט

תרגיל 1. יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ משטח k-מימדי, $a \in M$ ונניח שקיימת סביבה U של x ב $\mathbb{R}^n$ כך ש

$$U \cap M = \{x \in \mathbb{R}^n | F(x) = 0\}$$

עבור פונקציה גזירה ברציפות $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות, כך ש $\mathrm{rank}\nabla F(x) = n - k$ לכל $x \in U \cap M$. (שימו לב, מה שרשום כאן זאת אחת מההגדרות של משטח שראיתם כבר מספר פעמים בקורס).

הראו ש $v \in M_T(x)$ אם ורק אם קיימת מסילה

$$\gamma : (a, b) \to M$$

כך ש $\gamma(t) = a$ ו $\gamma'(t) = v$.

תרגיל 2. הוכיחו/הפריכו. אם לכל $x \in M \subseteq \mathbb{R}^3$, המרחב המשיק $M_T(x)$ הוא ממימד 3, אזי M היא משטח ממימד 3.

תרגיל 3.

1. מצאו בסיס למרחב המשיק והמשוואות מישור משיק עבור המשטח הנתון על ידי

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2^3 + 2x_3 + x_4^2 &= 9 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

בנקודה $(1, -1, 3, -1)$.

2. מצאו בסיס למרחב המשיק עבור המשטח הנתון על ידי

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^3 + z &= 1 \\ x + 3y + z &= 2 \end{aligned}$$

בנקודה $(1, 1, -2)$.

תרגיל 4. היכיחו ש $M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא משטח k-מימדי, אם ורק אם לכל $x \in M$ קיימת סביבה V של x, קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ו

$$\phi : U \to M$$

חד-חד-ערכית ורגולרית, כך ש $\phi(U) = V$ ולכל $W \subseteq U$ פתוחה, $\phi(W)$ פתוחה ב M (אומרים במקרה הנ"ל ש ϕ היא פונקציה פתוחה).

הדרכה: הראו שמצד אחד, תמונה של כדור פתוח ב U תחת ϕ היא פתוחה ב M וכך קבלו את אחת ההגדרות השקולות של משטח. על מנת להראות את הכיוון השני, הראו שפונקציה רגולרית וחח"ע מכדור פתוח היא פונקציה פתוחה ביחס לתמונה של אותו הכדור הפתוח, בעזרת שימוש במשפט הפונקציה ההפוכה עבור k השורות והעמודות שבהן הדטרמיננטה של ϕ אינה מתאפסת (קיימות כזו בגלל הרגולריות של ϕ).

תרגיל 5. תהיינה $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $W \subseteq R^l$ פתוחות, $M \subseteq \mathbb{R}^m$ משטח k-מימדי, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ משטח l-מימדי ו

$$\phi : U \to M$$
$$\psi : W \to N$$

חח"ע, פתוחות ורגולריות. נסמן $A = \phi(U)$, $B = \phi(W)$. כזכור, שטחי הפנים של A ו B נתונים על ידי הנוסחא:

$$S(A) = \int_U \sqrt{\left|D_\phi^t(u)\, D_\phi(u)\right|}\mathrm{d}u$$
$$.S(B) = \int_W \sqrt{\left|D_\phi^t(w)\, D_\phi(w)\right|}\mathrm{d}w$$

הראו שמתקיים

$$.S(A \times B) = S(A)\, S(B)$$

תרגיל 6. חשבו את שטח הפנים של המשטחים הבאים:

1. $.S = \left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2=16, \sqrt{x^2+y^2} \le z\right\}$
2. $.S = \left\{(x,y,z)\,|3x-3y+z=12, y^2+z^2 \le 1\right\}$
3. $.S = \left\{(x,y,z)\,|az=xy, x^2+y^2 \le a^2\right\}$

תרגיל 7. תהי $f(x)$ פונקציה חיובית המוגדרת בקטע $[a,b]$. כזכור, שטח הפנים של גוף סיבוב שלה סביב ציר ה-x נתון על ידי האינטגרל

$$.2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$$

הוכיחו נוסחא זו באמצעות אחת הנוסחאות לשטח פנים שלמדנו.