

אלגברה לינארית - תרגול 2

26 באוקטובר 2020

1 מרוכבים

1.1 2 הצגות שונות למרוכבים

ראינו הצגה קרטזית של המרוכבים באופן $z = a + bi$. נשים לב שכל מספר מרוכב ניתן להגדיר אותו ע"י שני פרמטרים אחרים:

- המרחק שלו מהראשית (נסמן באות r).
- הזווית מהחלק החיובי של הציר הממשי (נסמן בד"כ באות θ).

1.2 מעבר מקרטזי לפולרי

בהינתן $z = a + bi$, אנחנו יודעים שמתקיים $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. ונשים לב שגם $\tan \theta = \frac{b}{a}$, ומכאן נוכל לדעת את הזווית, עד כדי הזהה ב- π ברבעים הבעייתיים, כפי שנראה בדוגמאות הבאות:

1.3 מעבר מפולרי לקרטזי

בהינתן $z = r \operatorname{cis} \theta$, אז $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$. לדוגמא: $z = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ אז $z = 0 - 2i = -2i$.

1.4 משפט דה־מואבר

משפט: $(r_1 \operatorname{cis} \theta_1)(r_2 \operatorname{cis} \theta_2) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$, ומכאן:

$$(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

תרגילים:

$$1. \text{ פתרו את המשוואה } z^3 - 8i = 0$$

פתרון: $z^3 = 8i$ נעביר את $8i$ לפולרי ונקבל: $z^3 = 8\text{cis}(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, ולכן $z = \sqrt[3]{8\text{cis}(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = 2\text{cis}(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})$. נשים לב שנקבל:

$$z_0 = 2\text{cis}\frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = 2\text{cis}\frac{5\pi}{6}$$

$$z_2 = 2\text{cis}\frac{3\pi}{2}$$

$$z_3 = 2\text{cis}(\frac{\pi}{6} + 2\pi) = 2\text{cis}\frac{\pi}{6}$$

2 מערכת משוואות לינארית

מערכת משוואות לינארית ב־ n משתנים, המורכבת מ־ m משוואות הינה מערכת מהצורה:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{cases}$$

לצורך נוחות נייצג מערכת כזו במטריצה, שהיא מעין טבלה $m \times n$ (m שורות, n עמודות), כאשר המיקום ה־ i, j בטבלה מיועד עבור המקדם $a_{i,j}$. את $b_1, \dots, b_m$ שמים בוקטור עמודה נוסף, עם חוצץ מפריד:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

לדוגמא:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - z = -13 \\ 2x + 3y - 4z = 5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array} \right)$$

הערה: אם נסמן את מטריצת המקדמים ב- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$, ונסמן את מטריצת התשובות $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, ונסמן את מטריצת הנעלמים ב- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ אז מערכת המשוואות בסימונים אלה מסומנת

$$Ax = b$$

בהינתן מערכת משוואות, ישנן 3 פעולות מותרות:

1. החלפת שורות (או החלפת משוואות):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. כפל של שורה בסקלר שונה מאפס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array} \right)$$

3. חיבור כפל של שורה בסקלר לשורה אחרת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -2 & -25 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array} \right)$$

לאן אנחנו חותרים? לצורה מדורגת של המטריצה:
מטריצה תיקרא מדורגת אם מתקיים:

1. כל איבר מוביל נמצא מימין לאיבר המוביל שמעליו.

2. כל האיברים מתחת למוביל הינם 0.

3. שורות אפסי (אם קיימות) נמצאות בתחתית המטריצה.

הצורה הכללית של מדורגת:

$$\begin{pmatrix} * & ? & ? & ? & ? \\ & & * & ? & ? \\ & & & & * \end{pmatrix}$$

מטריצה תיקרא מדורגת קנונית אם:

1. היא מדורגת.

2. כל איבר מוביל = 1.

3. מעל כל איבר מוביל כל האיברים הינם 0.

כאשר * מבטאת משתנה מוביל, ? כל דבר, 0 =

הצורה הכללית של מדורגת קנונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & 0 & ? & 0 \\ & & 1 & ? & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, בהינתן מערכת $Ax = b$. נשים אותם במטריצה באופן $M = \left(A \mid b \right)$, ומדרגים אותה לצורה קנונית. למשתנה שבעמודה שלו יש איבר מוביל נקרא "משתנה תלוי", ולמשתנה שבעמודה שלו אין איבר מוביל נקרא "משתנה חופשי". ואז:

1. אם יש שורת סתירה (= שורת אפסים ב- A (נניח השורה ה- i), ואיבר $b_i \neq 0$ בוקטור b), נקבל שאין פתרונות למערכת.

2. אם אין שורת סתירה אז:

(א) אם יש משתנים חופשיים (לפחות אחד) אז יש אינסוף פתרונות.

(ב) אם אין משתנים חופשיים אז יש פתרון יחיד למערכת.

תרגילים:

1. פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

פתרון: נעבור לדרך מטריצית:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

כבר מהצורה המדורגת רואים שאין סורת סתירה, ואין משתנים חופשיים (כי בכל עמודה יש איר מוביל) ולכן נקבל: יש פתרון יחיד למערכת. נמשיך לדרג לצורה הקנונית כדי למצוא את הפתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

יוצא שהמערכת שלנו שקולה למערכת

$$\begin{cases} x = 1\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

וקל לראות מה פתרון המערכת הזו:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. פתרו: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$.
פתרון: נדרג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

נשים לב שקיבלנו את y כמשתנה חופשי, כי בעמודה השנייה אין איבר מוביל. נסמן אותו בפרמטר $y = t$, ונקבל שבמקרה זה $x = \frac{1}{2} - 2t$, ואז אוסף הפתרונות הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = 1, y = t, x = \frac{1}{2} - 2t, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

למשל, עבור $t = 1$ הפתרון הוא $\begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ועבור $t = 0$ הפתרון הוא $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. פתרו: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$
פתרון: נדרג:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2 - 4R_3 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

קיבלנו שורת סתירה בשורה הראשונה, ולכן אין פתרון למערכת.

4. מצאו לאילו ערכי a יש למערכת הבאה פתרון יחד / אינסוף / אין פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array} \right)$$

פתרון: נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ 0 & a(3-a) & 0 & 3-a \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 - aR_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & a(3-a) & 0 & 3-a \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & a(3-a) & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array} \right)$$

הגענו לצורה מדורגת (סוג של, תלוי ב- a). מה עלול לגרום לשורת סתירה או משתנה חופשי? תשובה: שורת אפסים במקדמים. לכן נבחן את האפשרויות הבאות:

(א) $a = 0$ נקבל שהשורה השנייה הינה סתירה ולכן אין פתרון למערכת.

(ב) $a = 1$ נקבל שהשורה השלישית הינה סתירה ולכן אין פתרון למערכת.

(ג) $a = 3$ נקבל את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

יש משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות, נמצא אותם בעזרת המשך דירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

נקבל ש y חופשי, ולכל $y = t$ הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix} 2-3t \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$$

כלומר, אוסף הפתרונות הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2-3t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

(ד) לכל $a \notin \{0, 1, 3\}$ נקבל מערכת מדורגת ללא משתנים חופשיים, ולכן יש

פתרון יחיד. הפתרון, כתלות בפרמט הוא:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & a(3-a) & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1-a} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1-a} \end{array} \right)$$

5. מצאו דוג' למערכת עם שורת אפסים שאינה סתירה, בעלת פתרון יחיד:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$