פתרון מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1**
מועד **ב** (08.04.18)

<u>שאלה 1</u> (24 נקודות – 8 נקודות לכל סעיף)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. יהי H מספר אינסופי חיובי ויהי $b\in\mathbb{R}$. אזי $H-b$ הוא מספר אינסופי חיובי.

<u>פתרון</u>

הטענה נכונה:

יהי $r\in\mathbb{R}$ ונוכיח ש- $H-b>r$. מכיוון ש- $b\in\mathbb{R}$ נקבל שגם $b+r\in\mathbb{R}$.
נתון ש- H הוא מספר אינסופי חיובי ולכן, לפי ההגדרה, מתקיים $H>b+r$. נעביר אגפים ונקבל $H-b>r$ כנדרש.

- ניתן להוכיח את הטענה גם בשלילה.
נניח ש- $H-b$ הוא לא מספר אינסופי חיובי. כלומר, קיים $a\in\mathbb{R}$ כך ש- $H-b\le a$ (וודאו שאתם מבינים מדוע זו השלילה הנכונה!). לכן $H\le a+b$ ומכיוון ש- $a+b\in\mathbb{R}$ נקבל סתירה לנתון ש- H הוא אינסופי חיובי.

ב. תהיינה f,g שתי פונקציות ממשיות ויהי $c\in\mathbb{R}$. אם הגבולות $\lim\limits_{x\to c}f(x),\lim\limits_{x\to c}g(x)$ לא קיימים, אז הגבול $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right)$ לא קיים.

<u>פתרון</u>

הטענה אינה נכונה (זה תרגיל משיעורי הבית):

ניקח כדוגמה נגדית את הפונקציות $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=-\frac{1}{x}$.
הגבולות $\lim\limits_{x\to 0}f(x),\ \lim\limits_{x\to 0}g(x)$ לא קיימים, ולעומת זאת הגבול של הסכום קיים:
$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}0=0$.

ג. תהי f פונקציה ממשית חיובית המוגדרת בכל נקודה ב- $\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$. אם הגבול $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ קיים, אז $\lim\limits_{x\to c}f(x)>0$.

[<u>שימו לב</u>: "חיובית" אומר ש- $f(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.]

<u>פתרון</u>

הטענה אינה נכונה:

ניקח לדוגמה את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ne 0\\ 2 & x=0\end{cases}$.
הפונקציה הנ"ל חיובית ומוגדרת בכל נקודה ב- $\mathbb{R}$. נתבונן בנקודה $c=0$. מחד הגבול $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ קיים, ומאידך הוא לא חיובי שכן $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

<u>שאלה 2</u> (26 נקודות)

I. נתונה פונקציה ממשית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת באמצעות:

$$f(x)=\begin{cases}\arctan^2 x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

א. (7 נקודות) באילו נקודות f רציפה?

<u>פתרון</u>

לכל $x\neq 0$ הפונקציה רציפה כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק רציפות ב-$x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\arctan^2(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\arctan^2(\Delta x)\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)$$

$$=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}(\text{infinitesimal}\times\text{finite})=0$$

ומכיוון שמתקיים $\lim_{x\to 0}\arctan^2(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)=0$ נקבל שהפונקציה רציפה באפס.

לסיכום: $\boxed{f \text{ רציפה ב- } \mathbb{R}}$.

ב. (8 נקודות) מצאו את f' בנקודות שבהן f גזירה.

<u>פתרון</u>

עבור $x\neq 0$ מתקיים: $f'(x)=\frac{2\arctan x}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\arctan^2 x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

נבדוק גזירות בנקודה $x=0$:

$$f'(0)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{\arctan^2\Delta x\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)-0}{\Delta x}\right)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}(\text{infinitesimal}\times\text{finite})=0$$

הסבר לכתוב באדום:

$$\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{\arctan^2\Delta x}{\Delta x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan^2 x}{x}\underset{\text{l'Hopital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2\arctan x}{1+x^2}=0.$$

לכן f גזירה באפס ומתקיים $f'(0)=0$.

לסיכום: $\boxed{f \text{ גזירה ב- } \mathbb{R}}$.

ג. (6 נקודות) האם f' רציפה בכל $x\in\mathbb{R}$? אם כן – הוכיחו; אם לא – סווגו את נקודות האי-רציפות שלה (סליקה, מין ראשון, מין שני).

<u>פתרון</u>

עד עכשיו ראינו שמתקיים:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2\arctan x}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\arctan^2 x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

לכל $x\neq 0$ הפונקציה f' רציפה כמכפלה, הרכבה והפרש של פונקציות רציפות.

נבדוק רציפות בנקודה $x=0$.

נחשב את אחד הגבולות <u>החד-צדדיים</u> (ואם הוא קיים, אז נחשב גם את השני).

נתבונן בגבול מימין:

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\arctan x}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\arctan^2 x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

הגבול הזה לא קיים ולכן הפונקציה f' לא רציפה באפס, ויש לה שם אי-רציפות ממין שני.

הסבר לאי-קיום גבול:

מכיוון ש- $\lim_{x\to 0^+}\frac{2\arctan x}{1+x^2}=0$, נקבל ש- $\lim_{x\to 0^+}\frac{2\arctan x}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

מכיוון ש-

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan^2 x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{l'Hopital}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\arctan x}{2x+2x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{l'Hopital}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\left(1+x^2\right)\left(2+6x^2\right)}=1$$

והגבול $\lim_{x\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים, נסיק שהגבול $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\arctan^2 x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ לא קיים.

ולכן גם הגבול $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\arctan x}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\arctan^2 x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ לא קיים, כהפרש של שני גבולות כאשר הראשון קיים והשני לא.

- <u>הערה לפתרון</u>: על מנת לסווג את נקודת אי-הרציפות <u>לא מספיק</u> להוכיח שהגבול $\lim_{x\to 0}f'(x)$ לא קיים. שכן הגבול הזה לא קיים גם במצב של מין ראשון וגם במצב של מין שני. לכן, על מנת להבחין בין שני המינים, חייבים לחקור את הגבולות החד-צדדיים!

.II (5 נקודות) חשבו את הגבול הבא, או הוכיחו שאינו קיים:

$\lim_{x\to\infty}\left(\arctan^2 x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x\right)$.

פתרון

מתקיים: $\lim_{x\to\infty}\left(\arctan^2 x\right)=\frac{\pi^2}{4}$ וכן

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}\underset{\text{l'Hopital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot-\frac{1}{x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1.$$

לכן: $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\arctan^2 x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x\right)=\frac{\pi^2}{4}}$.

שאלה 3 (22 נקודות)

א. (10 נקודות) הוכיחו ש- $ex\le e^x$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

פתרון

נגדיר פונקציה $f(x)=e^x-ex$ ונוכיח ש- $f(x)\ge 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

נחקור את הפונקציה.

הנגזרת היא $f'(x)=e^x-e$ ולכן $f'(1)=0$.

x	$x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ניתן לראות שלפונקציה יש מינימום מקומי יחיד בנקודה $(1,0)$ ולכן זהו מינימום מוחלט. כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)\ge f(1)$ ולכן $f(x)\ge 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, כנדרש.

ב. (12 נקודות) תהיינה f,g שתי פונקציות ממשיות רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b), עבור $a<b\in\mathbb{R}$. נתון ש- $f(a)=g(a)$ ו- $f'(x)<g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו ש- $f(b)<g(b)$.

<u>פתרון</u>

<u>דרך א</u>:

נגדיר פונקציה חדשה $h(x)=f(x)-g(x)$. זו פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) (מדוע?) ולכן מקיימת את תנאי משפט Lagrange.

כלומר, קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $h'(c)=\frac{h(b)-h(a)}{b-a}$.

לפי הנתון: $\frac{f(b)-g(b)}{b-a}=\frac{(f(b)-g(b))-(f(a)-g(a))}{b-a}=h'(c)$.

מכיוון ש-$h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$ לכל $x\in(a,b)$, נקבל ש- $h'(c)<0$ ולכן $0>\frac{f(b)-g(b)}{b-a}$.

מכאן נקבל ש- $f(b)<g(b)$ כנדרש.

<u>דרך ב</u>:

עבור הפונקציה $h(x)=f(x)-g(x)$ מתקיים:

$h'(x)<0$ לכל $x\in(a,b)$ ולכן h יורדת בקטע $[a,b]$. לכן מתקיים $h(a)>h(b)$, כלומר: $0>f(b)-g(b)$ ומכאן נסיק את הדרוש.

<u>שאלה 4</u> (14 נקודות)

א. (8 נקודות) הוכיחו שהסדרה הבאה היא מונוטונית: $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}:[0,\infty)\to\mathbb{R}$.

מתקיים: $f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$ ולכן לכל $x\geq 1$ מתקיים $f(x)\leq 0$. מכאן, לפי משפט המונוטוניות, הפונקציה יורדת בתחום $[1,\infty)$.

לכן לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $f(n)>f(n+1)$, כלומר $a_n>a_{n+1}$ ולכן הסדרה היא מונוטונית יורדת.

ב. (6 נקודות) מצאו את הגבול הבא אם קיים, ואחרת הוכיחו שאינו קיים:

$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+6}{(n+1)!+8}$.

פתרון

(תרגיל משיעורי הבית)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+6}{(n+1)!+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{6}{n!}}{(n+1)+\frac{8}{n!}}=0.$$

שאלה 5 (14 נקודות – 7 נקודות לכל סעיף)

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n+1}$

פתרון

זהו טור חיובי וניעזר במבחן ההשוואה.

ראינו שהסדרה $\ln(n)$ היא מונוטונית עולה. מכיוון ש-$\ln e=1$, נסיק שלכל $n\ge 3$ מתקיים $\ln n>1$.

לכן לכל $n\ge 3$: $\frac{\ln n}{n+1}>\frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$.

הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר ולכן גם $\boxed{\text{הטור } \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n+1} \text{ מתבדר}}$.

- אפשר גם באמצעות מבחן העיבוי. נסו זאת!

ב. $\sum_{n=15}^{\infty}\frac{n}{(-2)^{n-1}}$

פתרון

נבדוק תחילה התכנסות בהחלט:

$$\sum_{n=15}^{\infty}\left|\frac{n}{(-2)^{n-1}}\right|=\sum_{n=15}^{\infty}\left|\frac{n}{(-1)^{n-1}2^{n-1}}\right|=\sum_{n=15}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}.$$

נשתמש במבחן המנה:

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$ ולכן הטור $\sum_{n=15}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$ מתכנס לפי מבחן המנה.

לכן $\boxed{\text{הטור } \sum_{n=15}^{\infty}\frac{n}{(-2)^{n-1}} \text{ מתכנס בהחלט}}$.

- אפשר גם באמצעות מבחן השורש. נסו זאת!

<u>שאלת בונוס</u> (10 נקודות)

תהי f פונקציה גזירה ב-$\mathbb{R}$ ונניח ש-f' רציפה ב-$\mathbb{R}$. יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ ונניח ש-$f(a)=f(b)$ וגם $f'(a)=f'(b)$.

הוכיחו שקיימים $x_1,x_2\in(a,b)$ כך ש-$x_1\neq x_2$ וגם $f'(x_1)=f'(x_2)$.

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקציה חדשה $\boxed{h(x)=f'(x)-f'(a)}$. זו פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ומקיימת $h(a)=f'(a)-f'(a)=0,\ h(b)=f'(b)-f'(a)=0$.

אם $h(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$ אז סיימנו, שכן אז $f'(x)=f'(a)$ לכל $x\in[a,b]$ ובפרט קיימות שתי נקודות שונות $x_1,x_2\in(a,b)$ שעבורן $f'(x_1)=f'(x_2)$.

אחרת, קיימת נקודה $c\in(a,b)$ שעבורה $h(c)\neq 0$.

נשתמש (פעמיים) במשפט ערך הביניים.

1. h רציפה בקטע $[a,c]$ ולכן מקבלת את כל הערכים בין 0 ל-$h(c)$.

   בפרט קיימת נקודה $x_1\in(a,c)$ שעבורה $h(x_1)=\frac{h(c)}{2}$, כלומר:

   $\boxed{f'(x_1)=\frac{h(c)}{2}+f'(a)}$.

2. h רציפה בקטע $[c,b]$ ולכן מקבלת את כל הערכים בין 0 ל-$h(c)$.

   בפרט קיימת נקודה $x_2\in(c,b)$ שעבורה $h(x_2)=\frac{h(c)}{2}$, כלומר:

   $\boxed{f'(x_2)=\frac{h(c)}{2}+f'(a)}$.

מכיוון ש-$x_1\in(a,c)$ ו-$x_2\in(c,b)$, נקבל ש-$x_1\neq x_2$ וכן $f'(x_1)=f'(x_2)$, כנדרש!

בהצלחה בהמשך השנה!