

איך לתקוף שאלות על זהויות?

1. אם בצד אחד רואים ממש מקדם בינומי, אז יודעים שהוא סופר מספר תתי קבוצות בגודל מסויים של קבוצה בגודל מסויים. $\binom{n}{k}$ זה מספר תתי קבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n .

2. שימוש בכל מיני זהויות פשוטות שכבר מכירים:

(א) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. קומבינטורית: נסמן ב- A את קבוצת תתי קבוצות בגודל k מתוך $[n]$. ב- B את קבוצת תתי קבוצות בגודל $n-k$ איברים מתוך $[n]$. טענה: $|A| = |B|$.

הוכחה: נגדיר פונקציה $f: A \rightarrow B$ ע"י: לכל $X \in A$ נגדיר $f(X) = [n] \setminus X$. הפונקציה מוגדרת היטב כי אם $X \in A$ אז $|X| = k$, ולכן $|f(X)| = |[n] \setminus X| = n - |X| = n - k$ ולכן $f(X) \in B$. כדי לסיים ניתן למצוא הופכית או להוכיח חח"ע ועל.

הופכית: $f^{-1}: B \rightarrow A$ נגדיר ע"י: לכל $Y \in B$ נגדיר $f^{-1}(Y) = Y^c = [n] \setminus Y$. גם זו מוגדרת היטב באותה דרך. והן הופכיות אחת של השנייה כי:

$$f^{-1} \circ f(X) = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(X^c) = (X^c)^c = X$$

$$f \circ f^{-1}(Y) = f(f^{-1}(Y)) = f(Y^c) = (Y^c)^c = Y$$

ולכן ההרכבה בשני הצדדים היא הזהות, ולכן f הפיכה. אפשר גם להראות ש- f חח"ע ועל.

(ב) זהות הקפטן: $n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}$. קל אלגברית. קומבינטורית: שני הצדדים סופרים את האפשרויות לבחור תת קבוצה בגודל k מתוך n איברים, כאשר אחד מסומן. צד ימין: קודם בוחרים את התת-קבוצה, ואח"כ יש k אפשרויות למסומן. צד שמאל: קודם בוחרים את המסומן ב- n אפשרויות, ואז את $k-1$ הנוספים מ- $n-1$ הנותרים.

(ג) זהות פסקל: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. הוכחה בהרצאה.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (\text{ד})$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (\text{ה})$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (\text{ו})$$

שאלות מהקהל:

1. בכמה דרכים ניתן לשלוף 5 קלפים מחפיסה עם 52, כך שבקלפים שנבחרו תופענה כל 4 הצורות.

(א) נבחר קלף אחד מכל צורה. בחירת קלף מצורה ספציפית זה 13 אפשרויות. יש 4 צורות ולכן זה 13^4 (ע"פ עקרון הכפל כאשר יש לנו A_1, A_2, A_3, A_4 כל קבוצה עם 13 איברים מצורה ספציפית. בחירה של 4 קלפים עם 4 צורות זה בעצם איבר של $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$. כמה איברים יש במכפלה הזו? לפי עקרון הכפל יש $13^4 = \prod_{i=1}^4 |A_i| = |A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4|$. נותר לבחור קלף חמישי מ-48 הנותרים. ולכן נקבל $48 \cdot 13^4$. אבל נניח שהאחרון נבחר עלה. כיון שכבר נבחר עלה בהתחלה (נניח בהתחלה 2 עלה ובסוף 3 עלה) אז אנחנו מקבלים חשיבות בסדר בחירת ה"עלים", אבל אין חשיבות לסדר - לכן צריך לחלק בסדר של 2 הקלפים מאותה צורה, כלומר: לחלק ב-2 הסידורים של הצורה שנבחרה פעמיים. (ב) נבחר את הצורה שתיבחר פעמיים ב-4 אפשרויות, ואז עבודה יש לנו $\binom{13}{2}$, ועבור השאר 13^3 . נקבל:

$$4 \cdot 13^3 \cdot \frac{13!}{2 \cdot (13-2)!} = \frac{4 \cdot 13^4 \cdot 12!}{2 \cdot 11!} = \frac{13^4 \cdot 48}{2}$$

(ג) הכלה והדחה:

נגדיר ב- A_1 את הבחירות של 5 קלפים שאין בהן עלה.
נגדיר ב- A_2 את הבחירות של 5 קלפים שאין בהן תלתן.
נגדיר ב- A_3 את הבחירות של 5 קלפים שאין בהן לב.
נגדיר ב- A_4 את הבחירות של 5 קלפים שאין בהן יהלום.

העולם זה כל הבחירות האפשריות של 5 קלפים. נשים לב שאיחוד קבוצות אלה זה בדיוק בחירות שאנחנו לא רוצים. כל בחירה שלא באיחוד היא בחירה טובה.

לכן אנחנו צריכים לחשב את $\left| U \setminus \bigcup_{i=1}^4 A_i \right| = |U| - \left| \bigcup_{i=1}^4 A_i \right|$. נחשב:

$$|U| = \binom{52}{5}$$

כדי לחשב את האיחוד צריך לחשב את גדלי הקבוצות, חיתוכים, חיתוכי 3 וחיתוך כל הארבע.

$$|A_i| = \binom{39}{5}$$

חיתוכים:

$$|A_i \cap A_j| = \binom{26}{5}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{13}{5}$$

$$\left| \bigcap_{i=1}^4 A_i \right| = 0$$

ולכן גודל האיחוד הוא:

$$\left| \bigcup_{i=1}^4 A_i \right| = \binom{4}{1} \cdot \binom{39}{5} - \binom{4}{2} \cdot \binom{26}{5} + \binom{4}{3} \cdot \binom{13}{5} - \binom{4}{4} \cdot 0$$

ובסה"כ:

$$\begin{aligned} \left| U \setminus \bigcup_{i=1}^4 A_i \right| &= |U| - \left| \bigcup_{i=1}^4 A_i \right| = \binom{52}{5} - \left(\binom{4}{1} \cdot \binom{39}{5} - \binom{4}{2} \cdot \binom{26}{5} + \binom{4}{3} \cdot \binom{13}{5} - \binom{4}{4} \cdot 0 \right) \\ &= \binom{52}{5} - \binom{4}{1} \cdot \binom{39}{5} + \binom{4}{2} \cdot \binom{26}{5} - \binom{4}{3} \cdot \binom{13}{5} = \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{4}{k} \cdot \binom{52-13k}{5} \end{aligned}$$

(ד) תרגיל: הוכיחו את הזהות:

$$\sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{4}{k} \cdot \binom{52-13k}{5} = \frac{13^4 \cdot 48}{2}$$

2. הוכיחו שיש מספר המורכב רק מאפסים ואחדות המתחלק ב-5781.

פתרון: כאשר אנחנו מחלקים מספר ב-5781, כמה שאריות אפשריות יש? 5781. אם ניקח את המספרים מהצורה:

$$1, 11, 111, 1111, 11111,$$

יש אינסוף כאלה, אבל לנו מספיק 5782 כאלה. אם יש לנו 5782 מספרים, לכל אחד יש שארית כאשר מחלקים אותו ב-5781. כיון שיש רק 5781 שאריות אפשריות נקבל משובך היונים שיש שני מספרים עם אותה שארית. אם יש לנו שני מספרים שנותנים את אותה שארית, אז ההפרש ביניהם מתחלק במספר. קיבלנו שני מספרים המורכבים רק מאחדות, שההפרש ביניהם מתחלק ב-5781. אם ניקח את הגדול פחות הקטן נקבל מספר המורכב רק מאפסים ואחדות המתחלק ב-5781.

$$11111111 - 111 = 11111000$$