תרגיל 5

1. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A, B, C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B.

פתרון. נכון. אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A פשוט לפי הגדרה של טופולוגית תת מרחב. כנ"ל $B \cap C$ פתוחה ב B.

(ב) אם $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A \cup B$.

פתרון. לא. ניקח $X = \mathbb{R}$ ו $A = C = \{0\}$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A. ניקח $B = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ אז $B \cap C = \emptyset$ פתוחה אבל $\{0\}$ לא פתוחה ב $A \cup B = \mathbb{R}$

2. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z \subseteq Y \subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

פתרון. נכניס סימונים כאלה: τ היא הטפולוגיה של X. τ_Y ו τ_Z הן טפולוגיות התת מרחב על Y ו Z בהתאמה. כמו כן σ תהיה טופלוגיית תת המרחב ש (Y, τ_Y) משרה על Z. צריך להוכיח ש $\sigma = \tau_Z$. נוכיח הכלה דו כיוונית. נניח $A \in \sigma$ כלומר $A = Z \cap U$ כאשר $U \in \tau_Y$. לפי הגדרה $U = Y \cap V$ כאשר $V \in \tau$. לכן

$$A = Z \cap Y \cap V = Z \cap V$$

כאשר V פתוחה ב X. לפי הגדרה זה אומר ש $A \in \tau_Z$. מצד שני נניח $A \in \tau_Z$כלומר

$$A = Z \cap U$$

כאשר U פתוחה ב X. אז היות ש $Z \subseteq Y$ נקבל ש

$$A = Z \cap Y \cap U$$

ולפי הגדרה $Y \cap U \in \tau_Y$ ולכן

$$A \in \sigma$$

כנדרש. קיבלנו מה שרצינו.

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו-סופית היא בעצמה טופולוגיה קו-סופית.

פתרון. נניח X מרחב עם טופולוגיה קו סופית ו $Y \subseteq X$. צריך להוכיח שהקבוצות הסגורות ב Y הן בדיוק הקבוצות הסופיות. תהי $A \subseteq Y$ קבוצה סגורה אז

$$A = Y \cap U$$

כאשר U סגורה ב X כלומר U סופית ולכן גם A סופית. מצד שני נניח ש $A \subseteq Y$ סופית. אז

$$A = Y \cap A$$

אבל A סגורה ב X (כי היא סופית) ולכן היא גם סגורה ב Y. כנדרש.

3. תהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה, ויהי $A \subseteq X$. הוכיחו ש$f|_A : A \to Y$ רציפה.

פתרון. פתרון: תהא V פתוחה ב Y צ״ל כי $f|_A^{-1}(V)$ פתוחה ב A. אכן $f|_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ כיוון ש f רציפה $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X ולכן $f|_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ פתוחה ב A.

4. נניח ש$X = C_1 \cup ... \cup C_n$ איחוד סופי של קבוצות סגורות. ונניח שיש $f_i : C_i \to Y$ פונקציות רציפות שמזדהות על החיתוך. כלומר, לכל $i, j \in I$ מתקיים $f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}$. אז הפונקציה $f : X \to Y$ שמוגדרת ע״י הפונקציות f_i רציפה (באופן הבא: יהי $x \in X$. אז x שייך לאיזשהו C_i ואז נגדיר $f(x) = f_i(x)$. שימו לב שהפונקציה מוגדרת היטב. באופן שקול ופורמלי אפשר להגדיר $f = \cup_{i \in I} f_i$).

פתרון. פתרון: תהא S סגורה ב Y צ״ל כי $f^{-1}(S)$ סגורה ב X. אכן $f^{-1}(S) = \cup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(S)$. כיוון שלכל i נתון כי f_i רציפה אזי $f_i^{-1}(S)$ סגורה ב C_i, כלומר קיימת קבוצה K_i סגורה ב X כך ש $f_i^{-1}(S) = C_i \cap K_i$ שגם היא סגורה ב X כיוון שהיא חיתוך של שתי קבוצות סגורות. כעת, $f^{-1}(S) = \cup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(S)$ סגורה ב X כאיחוד סופי של סגורות.

5. איזה תכונות הפרדה מקיים המרחב הבא?
$(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\tau = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\mathbb{N}, \emptyset\}$ ו $O_n = \{1, ..., n\}$.
פתרון:
הוא T_0 בלבד. הוכחה:
T_0: יהיו $x_1 \neq x_2$. בה״כ $x_1 < x_2$ ואז $x_1 \in O_{x_1}$ ו $x_2 \notin O_{x_1}$.
לא T_1: יהיו $x_2 \neq x_1$. במידה ו $x_2 < x_1$ אזי כל קבוצה פתוחה שמכילה את x_1 תכיל גם את x_2 לפי הגדרת O_n. לכן לא נוכל למצאו קבוצה פתוחה U כך ש $x_1 \in O$ ו $x_2 \notin O$.

6. הוכיחו כי T_2 הוא תורשתי. כלומר, יהא (X, τ) מ״ט T_2 הוכיחו כי כל תת מרחב $Y \subseteq X$ הוא גם T_2.
פתרון:
יהא Y תת מרחב של X. יהיו $y_1 \neq y_2$ ב Y. הנקודות $y_1 .y_2$ גם ב X ולכן קיימות סביבות פתוחות (ב X) זרות V_1, V_2 כך ש $y_i \in V_i$. נקבל כי $y_i \in V_i \cap Y$ ואלו סביבות פתוחות ב Y וזרות.

7. יהא (X,τ) מ״ט בעל תכונה T_2. תהא $\tau \subseteq \tau'$ טופולגיה נוספת על X. הוכיחו כי (X,τ') גם כן T_2.

פתרון:

יהיו $x_1 \neq x_2$ ב X אזי קיימות $V_1, V_2 \in \tau$ זרות כך ש $x_i \in V_i$. כיוון ש $\tau \subseteq \tau'$ אז $V_1, V_2 \in \tau'$ יפרידו בין x_1, x_2.

8. בתרגיל זה נוכיח כי כל מ״מ (X,d) הוא T_4. יהא (X,d) מ״מ ויהיו S_1, S_2 קבוצות סגורות זרות.

(א) לכל $x \in S_1$ הוכיחו כי $d(x,S_2) > 0$

פתרון:

נניח בשלילה כי קיים $x \in S_1$ כך ש $d(x,S_2) = 0$ אזי קיימים $y_n \in S_2$ כך ש $d(x,y_n) \to 0$, כלומר $y_n \to x$. כיון ש S_2 סגורה אז גם $x \in S_2$ בסתירה לכך ש S_1, S_2 זרות.

(ב) לכל $x \in S_1$ נגדיר $r_x = \frac{d(x,S_2)}{2}$ ונגדיר $V_1 = \cup_{x\in S_1} B(x,r_x)$. באופן דומה, לכל $y \in S_2$ נגדיר $r_y = \frac{d(y,S_1)}{2}$ ונגדיר $V_2 = \cup_{y\in S_2} B(y,r_y)$. ברור כי V_1, V_2 פתוחות וזרות ו $S_i \subseteq V_i$. הוכיחו כי V_1, V_2 זרות וזה יסיים את ההוכחה כי (X,d) הוא T_4.

פתרון:

נניח בשלילה החיתוך $V_1 \cap V_2$ אינו ריק. אזי קיימים $x \in S_1, y \in S_2$ כך ש $z \in B(x,r_x) \cap B(y,r_y)$ אינו ריק. בה״כ $r_y \leq r_x$. נקבל כי

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y) < r_x+r_y \leq 2r_x = d(x,S_2) = \inf\{d(x,\tilde{y}) : \tilde{y} \in S_2\}$$

סתירה.

9. נראה מרחב שהוא T_2 שאינו T_3. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. נגדיר $\mathbb{CL}$ את קבוצת הקבוצות הסגורות ב $\mathbb{R}$ לפי המטריקה האוקלידית. ונגדיר $\{C = A \cup T | \, A \in \mathbb{CL}, \, T \subseteq S\}$ להיות הקבוצות הסגורות בטופולוגיה τ (כלומר τ מוגדרת להיות כל קבוצת כל המשלימים של קבוצות אלו). תאמינו לנו, τ יוצאת טופולוגיה.

(א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O \in \tau \iff O = B \cap R$ כאשר B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$R \supseteq S^c$.

פתרון:

$O \in \tau$ פתוחה אמ״מ $O^c = A \cup T$ סגורה אמ״מ $O = A^c \cap T^c = B \cap R$ מקיימת $B = A^c$ פתוחה בטופולוגיה האוקילידית ו $R = T^c \supseteq S^s$

(ב) הוכיחו שτ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)$ הוא האוסדורף.

פתרון:

תהי O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית. אז $O = O \cap \mathbb{R}$, ומתקיים ש O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו$\mathbb{R} \supseteq S^c$. לכן O פתוחה ב τ. הטופולוגיה האוקלידית היא T_2, ותרגיל אחר שעשיתם (ואם לא, תעשו!) שכל טופולוגיה שמכילה טופולוגיה האוסדורפית, היא האוסדורפית.

(ג) הראו שאם $O \in \tau$ כך ש $S \subseteq O$, אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.

פתרון:

לפי סעיפים קודמים, יש B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו $R \supseteq S^c$ כך ש $O = B \cap R$. נראה כי $O = B$ ע״י שנראה כי $R = \mathbb{R}$ ואז נסיים. אכן, מהנתון כי $S \subseteq$

$O=B\cap R$ נקבל כי $S\subseteq R$ אבל כיוון שגם $S^c\subseteq R$ נקבל כי $\mathbb{R}=S\cup S^c\subseteq R$ ולכן הם שווים.

(ד) הוכיחו שלא קיימות U,V פתוחות ב־τ וזרות כך ש $0\in U, S\subseteq V$. הסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)$ אינו T_3.

פתרון:

נניח בשלילה שיש קבוצות כאלו.

אם $V\in\tau$ כך ש $S\subseteq V$ אז V פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, לפי סעיף קודם.

בנוסף, $U=B\cap R$ עבור B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו־$S^c\subseteq R$.

לפי ההנחה בשלילה, $U\cap V=\emptyset$. כלומר, $B\cap R\cap V=\emptyset$.

$0\in B$. ו־B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית לכן קיים $B(0,\epsilon)\subseteq B$ ואז $\emptyset\neq B(0,\epsilon)\cap S\subseteq B\cap S$. כלומר החיתוך $B\cap S$ אינו ריק ולכן גם $B\cap S\subseteq B\cap V$.

.

כלומר, $B\cap V\neq\emptyset$. מכיוון ששתיהן פתוחות בטופולוגיה האוקלידית, $B\cap V$ פתוחה באוקלידית ולכן היא לא בת מנייה, כלומר $|B\cap V|>\aleph_0$ (להזכירכם כל קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}$ היא לא בת מניה כי היא מכילה קטע פתוח).

כעת, $R^c\subseteq S$. כלומר, המשלים של R הוא בן מנייה. לכן $B\cap V\nsubseteq R^c$. זה אומר ש $[B\cap V]\cap R\neq\emptyset$. סתירה.

נשים לב כי $S=\emptyset\cup S$ סגורה ב־τ, ו־$0\notin S$. אבל ראינו שלא ניתן להפריד בין 0 ל־S.
מסקנה: $(\mathbb{R},\tau)$ הוא לא T_3.