

מתמטיקה בדידה (88195) – בחינת סיום (מועד ב') פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שלוש שעות.
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על כל 5 השאלות, כל אחת בעמוד נפרד. כל השאלות שוות-משקל.
ניתן לסמן עמודים שלמים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק היטב את כל הפתרונות.

בהצלחה!

1. א. הגדירו: יחס שקילות, חלוקה (של קבוצה).
ב. הוכיחו: כל יחס שקילות על קבוצה מגדיר חלוקה שלה, ולהיפך.

2. תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה כלשהי. נגדיר פונקציה $f^{-1}: P(B) \rightarrow P(A)$ ע"י:
 $f^{-1}(\tilde{B}) := \{x \in A \mid f(x) \in \tilde{B}\} \quad (\forall \tilde{B} \in P(B))$
הוכיחו או הפריכו:
א. אם f חד-חד-ערכית אז f^{-1} חד-חד-ערכית.
ב. אם f חד-חד-ערכית אז f^{-1} על.
ג. אם f על אז f^{-1} חד-חד-ערכית.
3. תת-קבוצה A של קבוצת המספרים הממשיים \mathbb{R} נקראת חסרת ממוצעים אם לא קיימים $x, y \in A, x \neq y$ כך שגם הממוצע החשבוני $(x+y)/2$ שייך ל- A .
הוכיחו שקיימת תת-קבוצה חסרת ממוצעים מקסימלית (לגבי הכלה), כלומר:
תת-קבוצה חסרת ממוצעים $A \subseteq \mathbb{R}$ כך שאם $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ חסרת ממוצעים אז $A = B$.
4. תהיינה A, B קבוצות זרות ולא ריקות כך שקיימת פונקציה חד-חד-ערכית $f: A \cup B \rightarrow A$. הוכיחו או הפריכו:
א. בהכרח אינסופית.
ב. בהכרח אינסופית.
ג. $|B| \leq |A|$.
5. א. כמה מילים אפשר להרכיב ע"י שימוש בכל האותיות **א,א,א,ב,ב,ב,ג,ג,ד,ד**?
ב. בכמה מהמילים הנ"ל כל אות **ב** נמצאת מיד אחרי אות **א**?
ג. מהו מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f: \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 20\}$?