בוחן אינפי 1 למדמ"ח

יש לענות על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יחשב כ 100. נמקו היטב.

1. הגדירו את המושגים הבאים (5 נק' לכל סעיף):

(א) מספר אינסופי חיובי.
פתרון: מספר היפרממשי x נקרא מספר אינסופי חיובי אם הוא גדול מכל מספר ממשי.

(ב) נקודת אי רציפות ממין ראשון.
פתרון: נקודת אי רציפות c נקראת אי רציפות ממין ראשון אם הגבולות הצדדיים בנקודה זו קיימים ושונים.

(ג) פונקציה רציפה בנקודה c.
פתרון: אומרים שהפונקציה f רציפה בנקודה c אם $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. לחילופין: לכל אינפיניטיסימל $\epsilon \neq 0$ צריך להתקיים

$$\operatorname{st} f(c+\epsilon) = f(c)$$

(ד) מספרים קרובים אינסופית.
פתרון: אומרים ששני מספרים היפרממשיים a, b קרובים אינסופית אם $a-b$ הוא אינפיניטיסימל.

2. (16 נק' לכל סעיף)

(א) הוכיחו כי מספר אינסופי חיובי גדול מכל מספר היפרממשי סופי.
פתרון: יהי H מספר אינסופי ויהי a מספר סופי. היות ש a סופי, הוא לא אינסופי כלומר הוא לא גדול מכל מספר ממשי. לכן, קיים x ממשי כך ש

$$a < x$$

היות ש H אינסופי הוא גדול מכל מספר ממשי ולכן

$$x < H$$

ולכן

$$a < H$$

כנדרש.

(ב) יהי H מספר אינסופי חיובי. חשבו את החלק הסטנדרטי של:

$$2H\left(\sqrt{1+\frac{1}{H}}-1\right)$$

פתרון: נשתמש בכפל בצמוד

$$2H\left(\sqrt{1+\frac{1}{H}}-1\right) = \frac{2H\left(\sqrt{1+\frac{1}{H}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1} = \frac{2H\left(1+\frac{1}{H}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}$$

כעת:

$$\mathrm{st}(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{H}+1}}) = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{st}(1+\frac{1}{H})+1}} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = 1$$

3. (16 נק' לכל סעיף)

(א) נתונה עקומה המתוארת ע"י המשוואה

$$2\sin^2 x = 3\cos y$$

מצאו את משוואת המשיק לעקומה בנקודה $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

פתרון: נתחיל במציאת הנגזרת $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ בנקודה זו. נגזור את שני האגפים כדי לקבל

$$\frac{\mathrm{d}(2\sin^2 x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(3\cos y)}{\mathrm{d}x}$$

$$4\sin x\cos x = -3\sin y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

נציב את הערכים $x = \frac{\pi}{3}, \quad y = \frac{\pi}{3}$ ונקבל:

$$4\frac{\sqrt{3}}{4} = -3\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

ולכן:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2}{3}$$

כלומר משוואת המשיק היא

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

נותר למצוא את b ולצורך כך נציב $x = \frac{\pi}{3}, \quad y = \frac{\pi}{3}$ כלומר

$$\frac{\pi}{3} = -\frac{2}{3}\frac{\pi}{3} + b$$

כלומר

$$b = \frac{5}{9}\pi$$

ולכן משוואת המשיק היא

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\pi$$

(ב) עקום במישור נתון ע"י

$$y = t^2, \quad x = \ln(t+1)$$

עבור $-1 < t$. מצאו את כל הנקודות שבהן $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4$ (מצאו את הקואורדינטות (x, y) בנקודות אלה).

פתרון: נחשב:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{2t}{\frac{1}{t+1}} = 2t^2 + 2t$$

צריך ש:

$$2t^2 + 2t = 4$$

כלומר

$$t^2 + t - 2 = 0$$

כלומר הפתרונות הם:

$$t = 1, -2$$

אבל $t = -2$ מחוץ לתחום ההגדרה ולכן נישאר רק עם $t = 1$, כלומר הנקודה המבוקשת היא:

$$(\ln 2, 1)$$

4. (א) (16 נקודות) מצאו וסווגו את נקודות האי רציפות של הפונקציה:

$$\cos(\frac{x-1}{|x-1|})$$

פתרון: ברור שהפונקציה רציפה בכל נקודה פרט ל $x = 1$. ב $x = 1$ הפונקציה לא מוגדרת ולכן וודאי לא רציפה. נבדוק גבולות צדדיים.

$$\lim_{x \to 1^+} \cos(\frac{x-1}{|x-1|}) = \operatorname*{st}_{\Delta x > 0} \cos(\frac{1 + \Delta x - 1}{|1 + \Delta x - 1|}) = \operatorname*{st}_{\Delta x > 0} \cos(\frac{\Delta x}{|\Delta x|})$$
$$= \operatorname*{st}_{\Delta x > 0} \cos(\frac{\Delta x}{\Delta x}) = \operatorname*{st}_{\Delta x > 0} \cos(1) = \cos 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} \cos(\frac{x-1}{|x-1|}) = \operatorname*{st}_{\Delta x < 0} \cos(\frac{1 + \Delta x - 1}{|1 + \Delta x - 1|}) = \operatorname*{st}_{\Delta x < 0} \cos(\frac{\Delta x}{|\Delta x|})$$
$$= \operatorname*{st}_{\Delta x > 0} \cos(\frac{\Delta x}{-\Delta x}) = \operatorname*{st}_{\Delta x > 0} \cos(-1) = \cos(-1)$$

אבל

$$\cos(1) = \cos(-1)$$

כלומר הגבולות הצדדיים שווים ולכן יש גבול בנקודה $x = 1$ כלומר זוהי נקודת אי רציפות סליקה.

(ב) (10 נקודות) תהי f פונקציה המוגדרת בכל $\mathbb{R}$, רציפה ב 0, כך שלכל x, y מתקיים:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

הוכיחו כי f רציפה בכל נקודה.
פתרון: נבדוק שמתקיימת הגדרת רציפות בנקודה x_0 כלשהיא

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \underset{\Delta x \neq 0}{\mathrm{st}}(f(x_0 + \Delta x)) = \underset{\Delta x \neq 0}{\mathrm{st}}(f(x_0) + f(\Delta x)) \\ &= \underset{\Delta x \neq 0}{\mathrm{st}} f(x_0) + \underset{\Delta x \neq 0}{\mathrm{st}} f(\Delta x)\end{aligned}$$

היות ש f רציפה ב $x = 0$ מתקיים ש

$$\underset{\Delta x \neq 0}{\mathrm{st}} f(\Delta x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \underset{\Delta x \neq 0}{\mathrm{st}} f(x_0) + f(0) = f(x_0) + f(0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

כנדרש.