שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומֶני שְלוסבֶרג

פתרון תרגיל בית מספר 1

שאלה 1

$d=5, d_1=7, d_{\max}=4$.

$B_d(u,1)$ הוא עיגול היחידה ללא השפה עם מרכז u. $B_{d_1}(u,1)$ הוא הריבוע (ללא השפה) סביב u הכלוא בין הישרים $y=x+4, \quad y=-x+6, \quad y=-x+8, \quad y=x+2$. $B_{d_{\max}}(u,1)$ הוא הריבוע (ללא השפה) המוגדר ע"י: $4<y<6, \quad 1<x<3$.

שאלה 2

א. נוכיח רק אי שוויון המשולש (שאר התכונות טריוויאליות).

נניח ש- $m=\min\{k(x,y),k(y,z)\}$. מתקיים $a^m \mid x-y,\ a^m \mid y-z \Rightarrow a^m \mid x-z \Rightarrow m\le k(x,z)$, לכן $\min\{k(x,y),k(y,z)\}\le k(x,z)$. מכאן,

$$d(x,z)=\frac{1}{a^{k(x,z)}}\le\frac{1}{a^{\min\{k(x,y),k(y,z)\}}}=\max\left\{\frac{1}{a^{k(x,y)}},\frac{1}{a^{k(y,z)}}\right\}=$$

$$=\max\{d(x,y),d(y,z)\}\le d(x,y)+d(y,z)$$

ב. $x\in B_{d_5}\left(32,\frac{1}{25}\right)\Leftrightarrow (x=32)\vee\left(\frac{1}{5^{k(x,32)}}<\frac{1}{25}\right)$.

בהנחה ש $x\ne 32$ נקבל:

$$\frac{1}{5^{k(x,32)}}<\frac{1}{25}=\frac{1}{5^2}\Leftrightarrow k(x,32)>2\Leftrightarrow k(x,32)\ge 3\Leftrightarrow 5^3 \mid (x-32)\Leftrightarrow x-32\in 125\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in 32+125\mathbb{Z}$$

נשים לב שגם אם $x=32$ אז $x\in 32+125\mathbb{Z}$ ומכיון שכל הגרירות הנ"ל דו כיווניות ניתן להסיק

$B_{d_5}\left(32,\frac{1}{25}\right)=32+125\mathbb{Z}$.

שאלה 3

טענת עזר:

תהי $p\in B(x,R)$ ונניח שמתקיים $0<r\le R-d(x,p)$, אזי $B(p,r)\subseteq B(x,R)$.

הוכחת טענת עזר:

יהי $z \in B(p,r)$ אזי $d(p,z) < r$. $d(z,x) \le d(z,p) + d(p,x) < r + d(p,x) \le R$ ולכן $z \in B(x,R)$.

הערה: אכן מתקיים $0 < R - d(x,p)$ שכן $p \in B(x,R)$.

מש"ל טענת עזר.

כעת, יהי $r = \min\{r_2 - d(p,x_2), r_1 - d(p,x_1)\}$. מהעובדה ש- $p \in B(x_1,r_1)$ ומטענת העזר נובע ש- $B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1)$ (הציבו $x = x_1,\ R = r_1$). באופן דומה נקבל $B(p,r) \subseteq B(x_2,r_2)$.

שאלה 4

א. נניח ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף אזי קיימים $x \in X$, $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $x_n = x$. נראה שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל x. יהי $\varepsilon > 0$ אזי לכל $n > n_0$ מתקיים $d(x_n,x) = d(x,x) = 0 < \varepsilon$.

ב. מספיק להוכיח (עפ"י סעיף א') שכל סדרה מתכנסת במ"מ דיסקרטי היא קבועה לבסוף. נניח $\{x_n\} \to x$ במ"מ דיסקרטי, אזי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $d(x_n,x) < 1$; אבל זה אומר בהכרח שלכל $n > n_0$ $d(x_n,x) = 0$ (המרחקים האפשרים הם רק אפס או 1). מכאן $x_n = x$ לכל $n > n_0$.

שאלה 5

א) הוכחה באינדוקציה- הטענה טריויאלית עבור בסיס האינדוקציה $n = 2$.

נניח נכונות עבור $n \ge 2$ נקבל מאי שוויון המשולש ומהנחת האינדוקציה ש:

$$d(x_1,x_{n+1}) \le d(x_1,x_n) + d(x_n,x_{n+1}) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n+1$.

ב) שקול להוכיח $-d(x,y) \le d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y)$.

מאי שוויון המשולש נקבל $d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y)$ באופן דומה (תוך שימוש בתכונת הסימטריות בנוסף) נקבל:

$d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z) = d(x,y) + d(x,z)$ ולכן גם $-d(x,y) \le d(x,z) - d(y,z)$.

שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומֶני שְלוסברג

שאלה 6

א. יהי $y \in f\left(f^{-1}\left(A\right)\right)$, אזי קיים $x \in f^{-1}\left(A\right)$ כך ש- $y = f\left(x\right)$ וכן $f\left(x\right) \in A \Leftarrow x \in f^{-1}\left(A\right)$, ונקבל בסה"כ $y \in A$.

ב. כבר יש לנו הכלה בכיוון אחד, נוכיח את ההכלה בכיוון השני: $A \subseteq f\left(f^{-1}\left(A\right)\right)$. יהי $y \in A$. מכיוון ש f "על" נקבל שקיים $x \in f^{-1}\left(A\right)$ כך ש- $f(x) = y$. מכאן $y \in f\left(f^{-1}\left(A\right)\right)$.

דוגמא נגדית במקרה בו f לא "על". נניח $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ אזי

$$f\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}\right)\right) = \left\{0\right\} \neq \mathbb{R}.$$

ג. יהי $x \in B$, אזי $f\left(x\right) \in f\left(B\right)$ ולכן $x \in f^{-1}\left(f\left(B\right)\right)$.

ד. כבר יש לנו הכלה בכיוון אחד, נוכיח את ההכלה בכיוון השני:
$f^{-1}\left(f\left(B\right)\right) \subseteq B$. יהי $x \in f^{-1}\left(f\left(B\right)\right)$, אזי $f(x) \in f\left(B\right)$. נראה שבהכרח $x \in B$. אחרת, קיים $x \neq x_1 \in B$ כך ש- $f(x) = f(x_1)$. אך זו סתירה לכך ש- f חח"ע. מכאן $x \in B$.

דוגמא נגדית במקרה בו f לא חח"ע. אותה דוגמא כמו בסעיף ב' רק שהפעם נקח

$B = \left\{5\right\}$ ומתקיים $f^{-1}\left(f\left(B\right)\right) = f^{-1}\left(f\left(\left\{5\right\}\right)\right) = f^{-1}\left(\left\{0\right\}\right) = \mathbb{R} \neq \left\{5\right\}$.

פתרון שאלת בונוס

פתרון: נניח $a_2 \neq a_1$ וכן $r_1 < r_2$ ונניח בשלילה ש $B\left(a_2, r_2\right) \subseteq B\left(a_1, r_1\right)$ אזי $a_2 \in B\left(a_2, r_2\right) \subseteq B\left(a_1, r_1\right)$ ולכן $\| a_2 - a_1 \| < r_1$. יהי $v = a_1 + r_1 \cdot \frac{a_2 - a_1}{\| a_2 - a_1 \|}$ (שימו לב אם היינו ב $\mathbb{R}^2$ המשמעות הגיאומטרית היתה

חיבור של הוקטור a_1 לוקטור עם נורמה r_1 בכיוון של $a_2 - a_1$) מתקיים:

$$\|v-a_2\| = \left\|a_1 + r_1 \cdot \frac{a_2-a_1}{\|a_2-a_1\|} - a_2\right\| = \left\|(a_2-a_1)\cdot\left(\frac{r_1}{\|a_2-a_1\|}-1\right)\right\|$$

$$= \left\|(a_2-a_1)\frac{r_1 - \|a_2-a_1\|}{\|a_2-a_1\|}\right\| =$$

$$\frac{\|a_2-a_1\|}{\|a_2-a_1\|}\left|r_1 - \|a_2-a_1\|\right| = r_1 - \|a_2-a_1\| < r_1 < r_2$$

לכן $v \in B(a_2, r_2)$ אבל $v \notin B(a_1, r_1)$ שכן: $\|v-a_1\| = r_1$.

הערה : $a_2 \neq a_1$ ולכן בהכרח $\|a_2-a_1\| \neq 0$ ומכאן שהביטוי $\frac{a_2-a_1}{\|a_2-a_1\|}$ מוגדר. קיבלנו סתירה להנחה.