פתרון תרגיל בית מספר 7

שאלה 1

א. נניח בשלילה שהפנים לא ריק. אזי קיימת $a \in \text{int}(A)$. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $A \supseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = B(a,\varepsilon)$. אך מתקיים $|A| \le \aleph_0$ ועם זאת $\aleph = |(a-\varepsilon, a+\varepsilon)|$ וזאת סתירה.

ב. $\text{int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ ברור מא'

$cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$: $cl(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ ברור. נותר להראות את ההכלה ההפוכה. אך ראיתם באינפי' כי לכל ממשי יש סדרת איברים רציונאליים המתכנסת אליו.

ג. תהי $p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ההטלה על הרכיב הראשון. A סגורה שכן: $A = p_1^{-1}(\{0\})$.

נוכיח שהפנים ריק: תהי $a = (0, a_2, ..., a_n) \in A$ ונראה ש-$a \notin \text{int}(A)$. יש להראות שלכל $\varepsilon > 0$ $B(a,\varepsilon) \not\subset A$. למשל: $\left(\frac{\varepsilon}{2}, a_2, ..., a_n\right) \in B(a,\varepsilon) \setminus A$.

שאלה 2

א. F סגורה ב-(X,T_1) ולכן $F^C \in T_1$ ולכן $F^C \in T_2$ ולכן F סגורה ב-(X,T_2).

ב. $\text{int}_{T_1}(A) \subseteq \text{int}_{T_2}(A)$: $\text{int}_{T_1}(A) = \bigcup_{T_1 \ni O \subseteq A} O \underset{T_1 \subseteq T_2}{\subseteq} \bigcup_{T_2 \ni O \subseteq A} O$

$cl_{T_1}(A) \supseteq cl_{T_2}(A)$:

$cl_{T_2}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in (X,T_2)}} F$ וגם $cl_{T_1}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in (X,T_1)}} F$. כעת נשים לב שלפי א', אם $A \subseteq F$ וכן סגורה לפי T_1 אזי $A \subseteq F$ סגורה לפי T_2. לכן

$$cl_{T_1}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in (X,T_1)}} F \supseteq cl_{T_2}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in (X,T_2)}} F.$$

ג. שימו לב שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה הרגילה, ולכן כל קבוצה פתוחה לפי הרגילה, פתוחה לפי סורגנפריי; וכנ"ל לגבי קבוצה סגורה (לפי סעיף א).

$(0,1)$ פתוח לפי סורגנפריי ומתקיים $\text{int}((0,1)) = (0,1)$. מה לגבי הסגור? הקבוצה $(0,1)$ אינה סגורה, מכיוון שיש בה סדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\ge2}$ המתכנסת ל-0. לכן $0 \in cl((0,1)) \setminus (0,1)$. מצד שני, $[0,1)$ סגור ולכן זו בהכרח הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את $(0,1)$ ומכאן $cl(0,1) = [0,1)$.

$[0,1]$: זו קבוצה סגורה בטופולוגיה הרגילה ולכן סגורה גם בסורגנפריי ולכן $cl[0,1]=[0,1]$. בנוסף, נשים לב כי זו קבוצה לא פתוחה: כי כל סביבה של 1 היא מהצורה $[1,\varepsilon)$ עבור $\varepsilon>1$ כלשהו ולכן לא מוכלת בקבוצה. נמצא את הפנים: הפנים הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-$[0,1]$ ולכן $[0,1)$ = $\operatorname{int}[0,1]$.

$[0,1)$: סגוחה (ראו את התרגיל על קשירות) ולכן $\operatorname{int}([0,1))=cl([0,1))=[0,1)$.

$(0,1]$: ניתן לראות (משני נימוקים קודמים) שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה. הפתוחה המקסימלית שמוכלת בתוכה היא $(0,1)$ והסגורה המינימלית שמכילה אותה היא $[0,1]$ ולכן: $\operatorname{int}((0,1])=(0,1),\quad cl((0,1])=[0,1]$.

<u>שאלה 3</u>

א. נראה שמתקיימות 3 התכונות של טופולוגיה:

1) $\varnothing\in\tau$ שכן $x_0\notin\varnothing$. $X\in\tau$ שכן $X\setminus X=\varnothing$ סופית.

2) יהיו $O_1,O_2\in\tau$. יתכנו שני מקרים:

1. $x_0\notin O_1$ או $x_0\notin O_2$. במקרה זה $x_0\notin O_1\cap O_2$ ומכאן $O_1\cap O_2\in\tau$.

2. $X\setminus O_1, X\setminus O_2$ סופיות. במקרה זה נקבל ש $X\setminus(O_1\cap O_2)=X\setminus O_1\cup X\setminus O_2$ סופית כאיחוד סופי של סופיות וגם במקרה זה נקבל ש $O_1\cap O_2\in\tau$.

3) נניח שלכל $i\in I$ מתקיים $O_i\in\tau$. יתכנו שני מקרים:

1. לכל $i\in I$, $x_0\notin O_i$ במקרה זה נקבל $x_0\notin\bigcup_{i\in I}O_i$ ומכאן $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

2. קיים i_0 כך ש $X\setminus O_{i_0}$ סופית אבל במקרה זה נסיק ש- $X\setminus\bigcup_{i\in I}O_i\subseteq X\setminus O_{i_0}$ סופית. לכן, גם במקרה זה $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

ב. תהי $x_1\neq x_0$ נראה ש $\{x_1\}$ סגוחה.

$\{x_1\}$ פתוחה שכן $x_0\notin\{x_1\}$.

$\{x_1\}$ סגורה- נוכיח זאת ע"י שנראה ש $X\setminus\{x_1\}$ פתוחה. מתקיים $X\setminus(X\setminus\{x_1\})=\{x_1\}$ סופית ולכן $X\setminus\{x_1\}$ פתוחה.

נראה כעת ש- $\{x_0\}$ סגורה ואינה פתוחה.

סגורה- בדיוק כפי שמוכיחים ש- $\{x_1\}$ סגורה. $\{x_0\}$ אינה פתוחה שכן $x_0 \in \{x_0\}$ וכמו כן $X \setminus \{x_0\}$ אינסופית כי X אינסופית.

ג. נפרק לשני מקרים:

A סופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A$, ואנחנו נראה זאת ע"י כך שנראה כי A סגורה. ואכן, $A = X \setminus (X \setminus A)$ סופית, לכן $X \setminus A$ פתוחה ולכן A סגורה.

A אינסופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A \cup \{x_0\}$. נראה כי $A \cup \{x_0\}$ היא הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A. תחילה נשים לב כי אם A אינסופית וכן $x_0 \notin A$, אזי A אינה סגורה. אכן, אם נניח בשלילה כי היא סגורה, נקבל ש- $X \setminus A$ פתוחה. אך $x_0 \in X \setminus A$ ולכן בהכרח מתקיים $X \setminus (X \setminus A)$ סופית. אבל אז נקבל ש- A סופית, בסתירה לנתון.

כעת, נראה כי $A \cup \{x_0\}$ סגורה. מתקיים $x_0 \notin X \setminus (A \cup \{x_0\})$ ולכן $X \setminus (A \cup \{x_0\})$ פתוחה, ולכן $A \cup \{x_0\}$ סגורה.

ד. גם כאן יש שני מקרים:

$X \setminus A$ סופית.

במקרה זה, A היא קבוצה פתוחה (לפי הגדרת הטופולוגיה) ולכן $int(A) = A$.

$X \setminus A$ אינסופית.

נראה $A \setminus \{x_0\}$ תת קבוצה פתוחה מקסימלית של A ומכאן $int(A) = A \setminus \{x_0\}$

פתוחה: $x_0 \notin A \setminus \{x_0\}$ ולכן $A \setminus \{x_0\}$ פתוחה .

מקסימלית:

אם $A \setminus \{x_0\} = A$ אז המקסימליות ברורה.

אם $A \setminus \{x_0\} \neq A$ אז A לא פתוחה (שכן במקרה זה $x_0 \in A$ וגם אנו תחת ההנחה ש $X \setminus A$ אינסופית.)

ומכאן $A \setminus \{x_0\}$ הפתוחה המקסימלית המוכלת ב- A.

<u>שאלה 4</u>

נניח בשלילה שקיים $u \in U$ ו $u \notin cl\left(A \cap U\right)$. אזי קיימת סביבה O של u כך ש $A \cap O \cap U = \varnothing$. כעת, U פתוחה ו- $u \in U$ ולכן גם U סביבה של u. לכן, $V := U \cap O$ סביבה של u המקיימת $A \cap V = \varnothing$. בסתירה לכך ש A צפופה (אחד מהקריטריונים לצפיפות הוא: A צפופה אם ורק אם $A \cap W \neq \varnothing$ לכל W פתוחה ולא ריקה. אצלנו, V פתוחה ולא ריקה).

מכאן $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$

<u>הוכחת המסקנה:</u> $A \cap U \subseteq U$ ומכאן $cl\left(A \cap U\right) \subseteq cl\left(U\right)$ נוכיח את ההכלה הפוכה ונקבל הדרוש.

$cl\left(A \cap U\right)$ סגורה המכילה את U ומכאן $cl\left(U\right) \subseteq cl\left(A \cap U\right)$. בסה"כ $cl\left(U\right) = cl\left(A \cap U\right)$.

<u>שאלה 5</u>

1. $A \subseteq A \cup B$ לכן עפ"י סעיף (3) נקבל ש $cl(A) \subseteq cl\left(A \cup B\right)$, ובאופן דומה מראים ש $cl(B) \subseteq cl\left(A \cup B\right)$. לכן $cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl\left(A \cup B\right)$. נוכיח את ההכלה בכיוון השני:

$A \subseteq cl(A),\ B \subseteq cl(B)$ ולכן $A \cup B \subseteq cl(A) \cup cl(B)$. כעת $cl(A) \cup cl(B)$ סגורה כאיחוד סופי של סגורות ומכילה את $A \cup B$ לכן גם בהכרח $cl(A \cup B) \subseteq cl(A) \cup cl(B)$ (מדוע?).

2. $int\left(A \cap B\right) = int\left(A\right) \cap int\left(B\right)$
נוכיח הכלה דו כיוונית .

$\supseteq$: יהי $x \in int\left(A\right) \cap int\left(B\right)$, אזי קיימת $U \subseteq A$ פתוחה ב- X, וכן $V \subseteq B$ פתוחה ב- X כך ש- $x \in V \ \wedge\ x \in U$. לכן, $x \in U \cap V$. אבל, $U \cap V$ היא קבוצה פתוחה ב- X, וכן מתקיים $x \in U \cap V \subseteq A \cap B$ ולכן לפי ההגדרה של פְּנים, $x \in int\left(A \cap B\right)$.

$\subseteq$: יהי $x \in int\left(A \cap B\right)$, אזי קיימת $U \subseteq A \cap B$ פתוחה ב- X כך ש- $x \in U$. מתקיים $U \subseteq A \ \wedge\ U \subseteq B$, ולכן (לפי ההגדרה) $x \in int\left(A\right) \ \wedge\ x \in int\left(B\right)$.

3. הפרכה- נסתכל ב $\mathbb{R}$ על הקטע הפתוח (שהוא גם קבוצה פתוחה) $\left(0,2\right)$. מתקיים

$$cl\left(int\left(0,2\right)\right) = cl\left(0,2\right) = \left[0,2\right]$$
$$int\left(cl\left(0,2\right)\right) = int\left[0,2\right] = \left(0,2\right)$$

<u>שאלה 6</u>

א. אם X,Y הומיאומורפיים אז בפרט קיימת פונקציה $f : X \to Y$ חח"ע ועל ולכן $\left|X\right| = \left|Y\right|$
ההיפך: נניח ש $\left|X\right| = \left|Y\right|$ אזי קיימת פונקציה $f : X \to Y$ חח"ע ועל. אם X,Y מצויידים

בטופולוגיות הדיסקרטיות אז ברור שכל פונקציה $g: X \to Y$, ובפרט הפונקציה f הנ"ל רציפה ופתוחה (למה?), לכן אם $|X|=|Y|$ אז המרחבים הומיאומורפיים (שכן f רציפה הפיכה ופתוחה).

ב. נראה ש $\mathbb{N}$ דיסקרטי. אמנם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\{n\}=B(n,1)$ (אפשר לקחת כל רדיוס ≤ 1)

לכן כל נקודון פתוח והמרחב דיסקרטי. $A=\left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\} \cup\{0\}$ אינו דיסקרטי כי למשל $\{0\}$ לא פתוח כי כל כדור מסביב ל 0 כולל נקודות מ $\left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\}$.

ג. $(A,\tau_A),(B,\tau_B)$ אינם הומיאומורפיים כתוצאה מיידית מסעיפים קודמים.

ד. ברור שהעוצמה של שתי הקבוצות היא $\aleph_0$. כמו כן הוכחנו בסעיף ב' ש $\mathbb{N}$ דיסקרטי. לכן מ"ל ש $A=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ דיסקרטי כדי להסיק עפ"י א' שהמרחבים הומיאומורפיים.

נוכיח שכל נקודון מהצורה $\left\{\frac{n_0}{n_0+1}\right\}$ פתוח . יהי $\varepsilon=\min\left\{\frac{n_0}{n_0+1}-\frac{n_0-1}{n_0}, \frac{n_0+1}{n_0+2}-\frac{n_0}{n_0+1}\right\}$

ניתן לראות ש $\varepsilon>0$ וכן ש $\left\{\frac{n_0}{n_0+1}\right\}=B_A\left(\frac{n_0}{n_0+1},\varepsilon\right)$.

<u>שאלת בונוס</u>

מצורף פתרון (בקובץ נפרד) באדיבותו של גיל סלס.