מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132)
פתרון מועד א' (04.02.16)

מרצים: לואי פולב, פרופ' מיכאל כץ

מתרגלים: ויקטוריה בליזניאבסקי, דר' מנחם שלוסברג

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש ב**מחשבון פשוט**. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

שאלה 1 (15 נקודות)

הוכיחו את משפט הערך הממוצע של Lagrange:

תהי f פונקציה ממשית הרציפה על הקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה על הקטע הפתוח (a,b).

אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה

תהי f פונקציה ממשית הרציפה על קטע סגור $[a,b]$ וגזירה על הקטע הפתוח (a,b).

נסמן ב- $l(x)$ את הישר המחבר את הנקודות $(a,f(a)),(b,f(b))$. נמצא את משוואת הישר $l(x)$. מתקיים: $l(x)-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. נסמן: $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ונקבל: $l(x)=m(x-a)+f(a)$.

כעת נגדיר פונקציה $h(x)=l(x)-f(x)$ ונשים לב שהיא רציפה על $[a,b]$ וגזירה על (a,b) כהפרש של שתי פונקציות רציפות וגזירות. מתקיים:

$$h(a)=l(a)-f(a)=0$$
$$h(b)=l(b)-f(b)=0$$
.

לכן, לפי משפט Rolle, קיימת נקודה $c\in(a,b)$ המקיימת $h'(c)=0$, כלומר

$l'(c)-f'(c)=0$, ולכן $f'(c)=l'(c)$. לסיכום נקבל $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ כנדרש.

שאלה 2

א. (7 נקודות) הוכיחו ש- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

ב. (5 נקודות) מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n)}$ (נמקו היטב את תשובתכם!).

פתרון

א. [שימו לב שזה תרגיל מהתרגול] מתקיים $\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{\ln n}{n}}$. ראינו (ואפשר להראות לפי ל'הופיטל) ש- $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. מכיוון שהפונקציה e^x רציפה, נקבל $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^0=1$. לכן גם $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}=1$ ונקבל הדרוש.

ב. כמו בסעיף הקודם מתקיים $\sqrt[n]{\ln n}=e^{\frac{\ln(\ln n)}{n}}$. כמו כן $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=0$ ומאותם נימוקים כמו קודם, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n)}=e^0=1$.

שאלה 3

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונגדיר באמצעותה פונקציה חדשה:

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)\sin^2 x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

1. (10 נקודות) הוכיחו ש-G רציפה ב-$\mathbb{R}$.
2. (10 נקודות) האם G גזירה ב-$x=0$? אם לא – הסבירו מדוע, אם כן – חשבו את $G'(0)$ (שימו לב שהתשובה שלכם אמורה להיות תלויה ב- f).

ב. (10 נקודות) מצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $(1,2)$ עבור העקומה $4x^2+2xy+y^2=12$.

פתרון

סעיף א

1. עבור $x\neq 0$ הפונקציה רציפה כמנה של שתי פונקציות רציפות (שבה המכנה אינו מתאפס). נבדוק רציפות ב-0. שימו לב שבגלל ש- f רציפה, לכל Δx אינפי' מתקיים $f(\Delta x)\approx f(0)$. כעת נחשב את הגבול ב-0:

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)\sin^2 x}{x} = \underset{0\approx\Delta x\neq 0}{st}\left(\frac{f(\Delta x)\sin^2 \Delta x}{\Delta x}\right)$$

$$= \underset{0\approx\Delta x\neq 0}{st}\left(f(\Delta x)\sin\Delta x \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) = f(0)\cdot 0\cdot 1 = 0$$

קיבלנו שהגבול קיים ושווה לערך הפונקציה בנקודה, כלומר $\lim_{x\to 0} G(x) = G(0)$, ולכן הפונקציה רציפה ב-0.

לסיכום, הפונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$.

2. נחשב את הנגזרת:

$$G'(0) = \underset{0\approx\Delta x\neq 0}{st}\left(\frac{G(0+\Delta x)-G(0)}{\Delta x}\right) = \underset{0\approx\Delta x\neq 0}{st}\left(\frac{\frac{f(\Delta x)\sin^2\Delta x}{\Delta x}-0}{\Delta x}\right)$$

$$= \underset{0\approx\Delta x\neq 0}{st}\left(\frac{f(\Delta x)\sin^2\Delta x}{(\Delta x)^2}\right) = \underset{0\approx\Delta x\neq 0}{st}\left(f(\Delta x)\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)^2\right) = f(0)\cdot 1 = f(0)$$

לכן הפונקציה גזירה ב-0 ומתקיים $G'(0) = f(0)$.

סעיף ב

$$\frac{d(4x^2)}{dx} + \frac{d(2xy)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(12)}{dx}$$

$$8x + 2y + 2x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2x+2y) = -2y - 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y-4x}{x+y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = -2$$

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר (הוכיחו את תשובתכם!).

א. (7 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4-n^2}}$.

ב. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$.

ג. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+3^{-n}}$.

<u>פתרון</u>

א. [תרגיל מתרגילי הבית] נבדוק התכנסות בהחלט: יש לבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4-n^2}}$. ניתן לראות שהוא "מתנהג" כמו הטור ההרמוני ולכן נשתמש במבחן השוואה. מתקיים: $\frac{n}{\sqrt{n^4-n^2}}\le\frac{n}{\sqrt{n^4}}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$. הטור ההרמוני מתבדר ולכן גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4-n^2}}$ מתבדר. לכן הטור המקורי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4-n^2}}$ <u>אינו מתכנס בהחלט</u>.

נבדוק התכנסות בתנאי:

ניתן לראות שהסדרה $a_n=\frac{n}{\sqrt{n^4-n^2}}$ יורדת. נבדוק את גבולה:

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(n^2-1\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}=0$. הטור מקיים את תנאי משפט לייבניץ ולכן מתכנס.

לסיכום: <u>הטור מתכנס בתנאי</u>.

ב. [תרגיל מתרגילי הבית] שימו לב שמתקיים $2^{\ln n}=n^{\ln 2}$, ומכיוון ש-$\ln 2<1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln 2}}$ <u>מתבדר</u>.

פתרון אפשרי נוסף הוא באמצעות מבחן השוואה עם הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

ג. נבדוק את התנאי ההכרחי להתכנסות טור: הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{1+3^{-n}}$ אינו קיים (שכן $st\left(\frac{(-1)^H}{1+\frac{1}{3^H}}\right)$ תלוי בזוגיות של H) ולכן, בפרט, הגבול אינו אפס. האיבר הכללי של הטור אינו שואף לאפס ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+3^{-n}}$ <u>מתבדר</u>.

<u>שאלה 5</u>

א. (15 נקודות) תהי f פונקציה גזירה בכל $\mathbb{R}$ ונגדיר פונקציה חדשה $h(x)=f(x)+f(2-x)$. הוכיחו שקיימת נקודה $c\in[0,2]$ עבורה <u>הנגזרת</u> של h מתאפסת, כלומר $h'(c)=0$.

ב. (10 נקודות) תהי f פונקציה גזירה ב-$\mathbb{R}$ ונניח שקיים $c\in\mathbb{R}$ עבורו מתקיים $f'(c)>0$. הוכיחו שקיים $x>c$ ממשי המקיים $f(x)>f(c)$.

<u>פתרון</u>

א. הפונקציה $h(x)=f(x)+f(2-x)$ היא פונקציה רציפה בקטע $[0,2]$ וגזירה בקטע $(0,2)$ (כהפרש של רציפות וגזירות). כמו כן מתקיים

$$h(0)=f(0)+f(2)$$

$$h(2)=f(2)+f(0)$$

ולכן $h(0)=h(2)$. מכאן, h מקיימת את תנאי משפט Rolle, ולכן קיימת נקודה $c\in(0,2)$ עבורה $h'(c)=0$.

ב. נניח בשלילה שלכל $x>c$ ממשי מתקיים $f(x)\le f(c)$. אזי, בפרט, הטענה מתקיימת עבור כל $x\in\mathbb{R}^*$ ($x>c$).

לפי הנתון ולפי הגדרת הנגזרת מתקיים $f'(c)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\right)>0$

וזה מתקיים, בפרט, עבור $\Delta x>0$. אך אם $\Delta x>0$, אז $c+\Delta x>c$ ולפי הנחת השלילה $f(c+\Delta x)\le f(c)$ ולכן $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0$, ומכאן

$st\left(\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\right)\le 0$ בסתירה לנתון. לכן קיים $x>c$ ממשי המקיים $f(x)>f(c)$.

<u>שאלת בונוס</u> (7 נקודות)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו שקיים $c\in\mathbb{R}$ עבורו $f(c)=\frac{c}{1-c^2}$.

<u>פתרון</u>

נתבונן בפונקציה $h(x)=f(x)(1-x^2)-x$. שימו לב שאם $h(c)=0$ אז $f(c)=\frac{c}{1-c^2}$ (עבור $c\neq\pm1$). כעת, h היא פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$ ובפרט היא רציפה בקטע $[-1,1]$.

מתקיים $\begin{cases} h(1)=f(1)\cdot 0-1=-1 \\ h(-1)=f(-1)\cdot 0+1=1 \end{cases}$ ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c\in(-1,1)$ עבורה $h(c)=0$.

בהצלחה בהמשך השנה!