

צוות הקורס: ארז שיינר, שירה ידעי משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון בלבד

הוראות: יש לענות על כל השאלות, על גבי טופס המבחן במקום המתאים, מחברת הטיטא לא תסרק ולא תבדק.

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C , הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:

א. $A \setminus (B \cap C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

הפרכה:

נבחר $B = \emptyset, A = B = \{1\}$.

לכן

$$A \setminus (B \cap C) = A \setminus \emptyset = A = \{1\}$$

ואילו

$$A \setminus (B \cup C) = A \setminus A = \emptyset$$

ולכן

$$A \setminus (B \cap C) \not\subseteq A \setminus (B \cup C)$$

ב. $A \setminus (B \cap C) \supseteq A \setminus (B \cup C)$

הוכחה:

יהי $x \in A \setminus (B \cup C)$

צ"ל כי $x \in A \setminus (B \cap C)$

נתון כי $x \in A$ וגם $x \notin B \cup C$

כיוון ש $B \cap C \subseteq B \cup C$ נובע כי בפרט $x \notin (B \cap C)$

וביחד $x \in A \setminus (B \cap C)$

ג. $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

הפרכה:

למעשה הקבוצות הללו לעולם אינן שוות, כיוון שלכל קבוצה X מתקיים כי $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$:

נבחר $A, B = \emptyset$. כעת

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A \setminus B)$$

$$\emptyset \notin \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \quad \text{ד.}$$

הוכחה:

נבצע הכלה דו כיוונית.

ראשית,

תהי $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ צ"ל כי $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

נתון כי $X \subseteq A \cap B$ ולכן בוודאי $X \subseteq A$ וגם $X \subseteq B$

לכן $x \in \mathcal{P}(A)$ וגם $x \in \mathcal{P}(B)$, כפי שצריך להוכיח.

מצד שני, תהי $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ צ"ל כי $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$

נתון כי $X \in \mathcal{P}(A)$ וגם $X \in \mathcal{P}(B)$

לכן $X \subseteq A$ וגם $X \subseteq B$

ולכן $X \subseteq A \cap B$

ולכן $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

2. (21 נק') נביט ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow \left(\frac{b-a}{3} \in \mathbb{Z} \right)$$

א. הוכיחו כי R יחס שקילות.

רלפקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{R}$ צ"ל כי aRa

$$\text{אכן, } \frac{a-a}{3} = 0 \in \mathbb{Z}$$

סימטריות:

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש aRb צ"ל כי bRa

נתון כי $\frac{b-a}{3} \in \mathbb{Z}$ ולכן גם $-\frac{b-a}{3} \in \mathbb{Z}$ כלומר $\frac{a-b}{3} \in \mathbb{Z}$ ולכן bRa

טרנזיטיביות:

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש $aRb \wedge bRc$ צ"ל aRc

נתון כי

$$\frac{b-a}{3} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{c-b}{3} \in \mathbb{Z}$$

סכום של שני שלמים הוא שלם ולכן גם

$$\frac{b-a}{3} + \frac{c-b}{3} \in \mathbb{Z}$$

נפשט ונקבל

$$\frac{c-a}{3} \in \mathbb{Z}$$

ולכן aRc

ב. הוכיחו כי $[0]_R = \{3m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

נבצע הכלה דו כיוונית.

יהי $x \in [0]_R$ לכן $0Rx$

כלומר

$$\frac{x-0}{3} \in \mathbb{Z}$$

נסמן $\frac{x}{3} = m \in \mathbb{Z}$ ואכן $x = 3m$.

בכיוון ההפוך, יהי $m \in \mathbb{Z}$ צ"ל כי $3m \in [0]_R$

כלומר צ"ל כי $0R3m$

אכן

$$\frac{3m-0}{3} = m \in \mathbb{Z}$$

ג. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|[x]_R| = \aleph_0$.

יהי $x \in \mathbb{R}$ ונבנה פונקציה

$$f: [x]_R \rightarrow \mathbb{Z}$$

ונוכיח שהיא חח"ע.

לכל $a \in [x]_R$ מתקיים כי xRa ולכן $\frac{a-x}{3} = m \in \mathbb{Z}$

לכן הפונקציה תהיה מוגדרת היטב אם נגדיר

$$f(a) = a - x = 3m \in \mathbb{Z}$$

נוכיח כי f חח"ע: יהיו $a_1, a_2 \in [x]_R$ כך ש $f(a_1) = f(a_2)$

לכן

$$a_1 - x = a_2 - x$$

$$a_1 = a_2$$

$$|[x]_R| \leq |\mathbb{Z}| = \aleph_0$$

מצד שני נוכיח כי $[x]_R$ אינסופית, ולכן $\aleph_0 \leq |[x]_R|$ ולפי ק.ש.ב סיימנו.

אכן, לכל $m \in \mathbb{Z}$ מתקיים כי $x + 3m \in [x]_R$ שהרי

$$\frac{x + 3m - x}{3} = m \in \mathbb{Z}$$

(אפשר היה לנסח את החלק האחרון כפונקציה חח"ע מהשלמים אל מחלקת השקילות ולהוכיח שהיא חח"ע).

3. (21 נק') נביט ביחס S על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a, b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow ((b = a) \vee \exists n \in \mathbb{N}: b = na^2)$

א. הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.

רפלקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{N}$ צ"ל כי aSa . כיוון ש $a = a$ זה ברור.

אנטי-סימטריות:

יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ כך ש aSb וגם bSa צ"ל כי $a = b$

נב"ש כי $a \neq b$

לכן קיימים $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ כך ש

$$b = n_1 a^2$$

$$a = n_2 b^2$$

נציב את המשוואה הראשונה בשנייה

$$a = n_2 n_1^2 a^4$$

אם $a = 0$ אז מהמשוואה הראשונה $b = 0$ בסתירה לכך ש $a \neq b$.

לכן $a \neq 0$ ואפשר לחלק בו ולקבל

$$1 = n_2 n_1^2 a^3$$

כיוון שמדובר במספרים טבעיים, נובע כי

$$n_2 = n_1 = a = 1$$

ולכן שוב $a = b$, בסתירה.

טרנזיטיביות:

יהיו $a, b, c \in \mathbb{N}$ כך ש $aSb \wedge bSc$ צ"ל כי aSc .

אם $a = b$ או $b = c$ התוצאה ברורה. אחרת, קיימים $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ כך ש

$$b = n_1 a^2$$

$$c = n_2 b^2$$

ולכן

$$c = n_2 n_1^2 a^4 = n_2 n_1^2 a^2 \cdot a^2$$

כלומר aSc כפי שצריך.

ב. הוכיחו כי $1 \in \mathbb{N}$ הוא האיבר הקטן ביותר ביחס S , וכן $0 \in \mathbb{N}$ הוא האיבר הגדול ביותר ביחס S .

יהי $a \in \mathbb{N}$ צ"ל כי $1Sa$ וכן $aS0$

עבור $1Sa$ צ"ל כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש

$$a = n \cdot 1^2$$

נבחר $n = a$ וסיימנו.

עבור $aS0$ צ"ל כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש

$$0 = n \cdot a^2$$

נבחר $n = 0$ וסיימנו.

ג. נביט בקבוצה $A = \{12, 36\}$. מצאו את החסם התחתון $\inf(A)$, והוכיחו את נכונות תשובתם.

ראשית נמצא את קבוצת חסמי המלרע של הקבוצה.

m חסם מלרע של A אם

$$(a, 12) \in S \wedge (a, 36) \in S$$

כיוון ש 0 הוא המספר הגדול ביותר, $(12, 0) \in S$ ולכן $(0, 12) \notin S$

כיוון ש 1 הוא האיבר הקטן ביותר, ברור כי $(1, 12) \in S, (1, 36) \in S$

עבור $a = 2$ מתקיים כי

$$12 = 3 \cdot 2^2$$

$$36 = 9 \cdot 2^2$$

ולכן 2 הוא חסם מלרע של A .

עבור 3 מתקיים כי $3 \neq 12$ וגם $12 \neq n \cdot 3^2$

ולכל $a > 3$ מתקיים כי $a^2 \geq 16 > 12$ ולכן $(a, 12) \in S$ רק במקרה $a = 12$

אבל $(12, 36) \notin S$ כיוון ש $36 \neq n \cdot 12^2$.

לסכם קבוצת חסמי המלרע של A היא $\{1, 2\}$

החסם התחתון הוא האיבר הגדול ביותר בקבוצת חסמי המלרע, במקרה זה נראה כי מדובר ב 2 .

צ"ל כי $(1, 2) \in S$ ואכן

$$2 = 2 \cdot 1^2$$

ובסה"כ $\inf(A) = 2$.

4. (18 נק') תהי קבוצה A ותהי פונקציה $f: A \rightarrow A$ אשר אינה הפיכה.

נביט ב $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$ עבור $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

א. הוכיחו כי לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי f^n אינה הפיכה.

אם $n = 1$ אזי $f^1 = f$ והתוצאה ברורה מהנתונים.

אם $n \geq 2$, נב"ש כי f^n הפיכה.

כיוון ש $f^n = f^{n-1} \circ f$ הפיכה, היא חח"ע ולכן הפנימית f היא חח"ע.

מצד שני $f^n = f \circ f^{n-1}$ הפיכה ולכן על, ולכן החיצונית f היא על.

סה"כ f חח"ע ועל ולכן הפיכה, בסתירה.

הערה: $f^n = f^{n-1} \circ f = f \circ f^{n-1}$ בזכות האסוציאטיביות של ההרכבה.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $Im(f) = Im(f^n)$.

הפרכה:

נבחר $A = \{1, 2, 3\}$ ובפונקציה f המקיימת

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 2$$

מתקיים כי $Im(f) = \{1, 2\}$

כעת

$$f(f(1)) = f(1) = 1$$

$$f(f(2)) = f(1) = 1$$

$$f(f(3)) = f(2) = 1$$

כלומר $Im(f^2) = \{1\} \neq Im(f)$

5. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם הקבוצה מעוצמה

סופית, מצאו את העוצמה.

א. $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid Im(f) \subseteq \mathbb{Q}\}$

אם נביט ביחסים שמגדירים את הפונקציות, נתון כי לכל $f \in A$ מתקיים כי

$$f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$$

כלומר f היא גם פונקציה לטווח הבא

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$$

לכן

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}| = \aleph_0^{\aleph}$$

כעת

$$2^{\aleph} \leq \aleph_0^{\aleph} \leq \aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph} = 2^{\aleph}$$

ב. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{Im}(f) = \mathbb{R}\}$

מצד אחד $B \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ולכן $|B| \leq \aleph^{\aleph}$

מק.ש.ב. ולפי החישוב בסעיף הקודם, $\aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$.

מצד שני נבנה פונקציה חח"ע

$$h: \mathbb{R}^{(-\infty, 0]} \rightarrow B$$

ולכן נקבל כי

$$\aleph^{\aleph} \leq |B|$$

ולפי ק.ש.ב. נסיים ונקבל כי $|B| = 2^{\aleph}$.

לכל $f \in \mathbb{R}^{(-\infty, 0]}$ נגדיר את הפונקציה

$$g_f(x) = \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \\ f(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

כיוון ש $\ln(x)$ פונקציה על, נובע בקלות כי $\text{Im}(g_f) = \mathbb{R}$ ולכן $g_f \in B$.

ולכן פונקציה $h: \mathbb{R}^{(-\infty, 0]} \rightarrow B$ המוגדרת ע"י $h(f) = g_f$ מוגדרת היטב.

מצד שני, אם $f_1 \neq f_2 \in \mathbb{R}^{(-\infty, 0]}$ קיים $x < 0$ כך ש $f_1(x) \neq f_2(x)$

ולכן גם $g_{f_1}(x) \neq g_{f_2}(x)$ שהרי

$$g_{f_1}(x) = f_1(x)$$

$$g_{f_2}(x) = f_2(x)$$