תרגילי חזרה לבוחן־ אינפי 1

21 בדצמבר 2016

שאלה 1

מצאו האם הגבול הבא קיים (במובן הרחב) אם הוא אכן קיים, מצאו אותו:

$$lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}\right)\cdots\left(\sqrt{3}-\sqrt[n]{3}\right)$$

פתרון:

$\forall n:\ \sqrt[n+1]{3} > 1$ ולכן הסדרה היא מונוטונית יורדת שכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{3} - \sqrt[n+1]{3} < \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1$. מדובר בסדרה חיובית ולכן היא חסומה מלרע ע"י אפס ומכאן $\exists lim_{n\to\infty} a_n = L$.

נציב את הסדרה ע"י נוסחת הנסיגה בצורה הבאה: $a_{n+1} = a_n\left(\sqrt{3} - \sqrt[n+1]{3}\right)$ ולכן מאריתמטקה של סדרות נקבל $L = lim_{n\to\infty} a_n \cdot lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3} - \sqrt[n+1]{3}\right) = L\left(\sqrt{3}-1\right)$ ולכן הגבול הוא אפס.

שאלה 2

נתונה סדרה שמוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, $a_1 = c$ ו־$c > 0$.

א) עבור איזה ערך של c a_n היא סדרה מונוטונית יורדת.

ב) עבור איזה ערך של c a_n היא סדרה מונוטונית עולה.

ג) הוכח ש־a_n היא סדרה מתכנסת וחשב את גבולה

פתרון:

נחלק את הפתרון למקרים:

מקרה א: $c > 1$

נראה באינדוקציה שבמקרה הזה a_n היא סדרה מונוטונית יורדת:

עבור $n = 1$ נקבל: $a_2 = \sqrt{a_1} = \sqrt{c} < c = a_n$

נניח את נכונות הטענה עבור n, כלומר נניח ש־$a_{n+1} < a_n$

ונוכיח עבור $n+1$, כלומר רוצים להוכיח ש־$a_{n+2} < a_{n+1}$:

הוכחה: $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{a_n} \Leftrightarrow a_{n+2} < a_{n+1}$ כי a_n היא סדרה של מספרים חיוביים, אבל זה נכון לפי נחת האינדוקציה.

מקרה ב: $0 < c < 1$

הוכחה דומה ל־א' .

ולכן סדרה היא מונוטונית עולה כאשר $c > 1$ ומונוטונית יורדת כאשר $0 < c < 1$.

נוכיח חסימות עבור מקרה א':

עבור $n = 1$ נקבל ש־$a_1 > 1$

נניח נכונות עבור nכלומר נניח ש־$a_n > 1$

נוכיח עבור $n+1$, כלומר צ"ל $a_{n+1} > 1$

הוכחה: $a_n > 1 \Leftrightarrow \sqrt{a_n} > 1 \Leftrightarrow a_{n+1} > 1$ אבל זה נכון לפי הנחת האינדוקציה.

הוכחה של חסומות למקרה ב' דומה

נמצא את הגבול עבור מקרה א':

$L = lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} a_{n+1} = lim\sqrt{a_n} = \sqrt{L}$. נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל שהגבול הוא 0 או 1, אבל את 0 אנחנו פוסלים כי הסדרה שלנו חסומה מלרע ע"י 1 .

חישוב גבול עבור מקרה ב' דומה.

שאלה 3

חשב את גבול הסדרה הבאה: $2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, ...$

פתרון:

נציג את הסדרה ע"י הנוסחת הנסיגה: $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$, $a_1 = 2$.

נראה שהסדרה היא מונוטונית יורדת החל מ־$n = 2$:

$n = 2$: $a_3 = 2 + \frac{1}{a_2} = 2 + \frac{1}{2.5} < 2 + \frac{1}{2} = a_1$

נניח נכונות עבור n: כלומר נניח ש־$a_{n+1} < a_n$

נוכיח עבור $n+1$: כלומר רוצים להוכיח ש־$a_{n+2} < a_{n+1}$:

הוכחה: $a_{n+2} > a_{n+1}$ אמ"ם $2 + \frac{1}{a_{n+1}} > 2 + \frac{1}{a_n}$ אמ"ם $a_{n+1} < a_n$ וזה נכון לפי הנחת האינדוקציה.

נוכיח שהיא חסומה מלרע ע"י 2:

עבור $n=1$ ברור, נניח נכונות עבור n כלומר נניח ש־$a_n>2$ ונוכיח עבור a_{n+1}:

הוכחה: $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}>2$ אמ"ם $a_n>0$ אבל זה ברור מהתבוננות בסדרה.

הוכחנו שסדרה היא מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן מתכנסת לגבול L.

$L=lima_n=lima_{n+1}=lim2+\frac{1}{a_n}=2+\frac{1}{L}$, נקבל משוואה ריבועית $L^2-2L-1=0$ ולאחר פתרון קבל ש־$L=1+\sqrt{2}$. למה $1-\sqrt{2}$ נפסל?

שאלה 4

ענו על סעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א) תהי סדרה a_n כך ש־$a_n\to 2$ ולכל n, $a_{n+1}\neq a_n$. חשב את $lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{a_{n+1}-a_n}}$.

פתרון:

נשתמש בטענה שראיתם בתרגיל בית: אם $lima_n=1$ אז $lim\left(a_n\right)^{b_n}=e^{lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}$.

ולכן $= e^{lim\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)\frac{1}{a_{n+1}-a_n}} = e^{lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\frac{1}{a_{n+1}-a_n}} = lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{a_{n+1}-a_n}}$

$e^{lim\left(\frac{1}{a_n}\right)}=e^{\frac{1}{2}}$

ב) תהי a_n סדרה עבורה $\frac{a_n}{1+a_n}\to 0$. הוכיחו: $a_n\to 0$.

פתרון:

$\frac{a_n}{1+a_n}=\frac{a_n-1+1}{a_n+1}=1-\frac{1}{a_{n+1}}$.

ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות מקבלים: $0=\left(1-\frac{1}{a_n+1}\right)lim \Leftarrow= lim1+lim\frac{1}{a_n+1}$

$0\Leftarrow 1 = lim\frac{1}{a_n+1} \Leftarrow 1 = \frac{lim1}{lim(a_n+1)} \Leftarrow 1 = lim\left(a_n+1\right)$ ולכן $1 = lima_n+lim1$ ומה שגורר ש־$lima_n=0$.

ג) תהיינה a_n,b_n שתי סדרות כך ש־$a_n\cdot b_n\to 0$. הוכח או הפרך: $a_n\to 0$ או $b_n\to 0$.

פתרון:

הפרכה: נבחר $a_n=\begin{cases}1 & n=2k\\ 0 & n=2k-1\end{cases}$ ו־ $b_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ 1 & n=2k-1\end{cases}$. ברור ש־$a_n\cdot b_n=0\to 0$ אבל שתיהן לא מתכנסות לאפס.

שאלה 5

ענה על הסעיפים הבאים: (אין קשר בין הסעיפים)

א) הוכח או הפרך: $limb_n=0$ אזי $lim\frac{b_{n+1}}{b_n}=0$.

פתרון:

נפריך: $b_n = \frac{1}{2^n} \to 0$ אבל $0 \neq \frac{1}{2} = lim\frac{1}{2} = lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

ב) תהי a_n סדרה ממשית מתכנסת לגבול ממשי L ותהי b_n סדרה חסומה. אזי $a_n \cdot b_n$ מתכנסת אמ"ם $L = 0$.

כיוון $\Leftarrow$: נניח ש־$a_n \cdot b_n$ מתכנסת ונוכיח ש־$L = 0$: $lima_n \cdot b_n = L \cdot limb_n = K$

אזי אם $L \neq 0$ אזי קבל לפי אריתמטיקה של גבולות $limb_n = \frac{K}{L}$ ולכן קבלו ש־b_n מתכנסת בסתירה לנתון. ולכן $L = 0$.

כיוון $\Rightarrow$: מיידי לפי אריתמטיקה של גבולות.

שאלה 6

חשב את הגבולות הבאים:

א) $lim\left(\frac{n^2+5}{3n^2+1}\right)^n$

פתרון:

$$lim\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3n^2+15}{3n^2+1}\right)^n = lim\frac{1}{3^n}\left(\frac{3n^2+1+14}{3n^2+1}\right)^n = lim\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{14}{3n^2+1}\right)^n = lim\frac{1}{3^n}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{3n^2+1}{14}}\right)^{n\cdot\frac{3n^2+1}{14}\cdot\frac{14}{3n^2+1}} = lim\frac{1}{3^n}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n^2+1}{14}}\right)^{\frac{3n^2+1}{14}}\right)^{\frac{14n^2}{3n^2+1}} = e^{\frac{14}{3}}\cdot lim\frac{1}{3^n} = 0$$

ב) $lim\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

פתרון:

$$lim\left(\frac{n^2-2+3}{n^2-2}\right)^{n^2} = lim\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2}{3}}\right)^{n^2-2+2} = lim\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2}{3}}\right)^{\frac{n^2-2}{3}\cdot 3}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2}{3}}\right)^2 = e^3$$

ג) $lim\left(\frac{n^2+2n-1}{2n^2-3n-2}\right)^n$

פתרון:

$$lim\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2n^2+4n-2}{2n^2-3n-2}\right)^n = lim\frac{1}{2^n}\cdot\left(1-\frac{7n}{2n^2-3n-2}\right)^n = lim\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{\frac{2n^2-3n-2}{7n}}\right)^{n\cdot\frac{2n^2-3n-2}{7n}\cdot\frac{7n}{2n^2-3n-2}} = e^{\frac{7}{2}}\cdot lim\frac{1}{2^n} = 0$$